

---

Facultad de Ingeniería  
Universidad Nacional de La Plata

# ESTRUCTURAS II y III

Para alumnos de la carrera de Ingeniería Aeronáutica y Mecánica de la UNLP

## *CRITERIOS DE ROTURA DE MATERIALES*

Autores:

Ing. Asdrúbal Bottani  
Ing. Juan P. Durruty



## CRITERIOS DE ROTURA DE MATERIALES

### ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

Todo cuerpo al ser sometido a cargas, se deforma y por lo tanto las fuerzas aplicadas sobre él cambian de posición, es decir recorren una cierta distancia por lo que se puede afirmar que realizan cierto trabajo. En el caso de fuerzas aplicadas a un cuerpo en forma estática, es decir que van creciendo en forma lenta hasta alcanzar su valor final, y además considerando que los vínculos con que está fijado el cuerpo sean tales que al deformarse los mismos, las fuerzas de rozamiento sean lo suficientemente pequeñas como para no tener en cuenta su trabajo, se puede afirmar que el trabajo de las fuerzas exteriores se utiliza totalmente para deformar al cuerpo.

En el caso de cuerpos perfectamente elásticos, ese trabajo externo se ha transformado totalmente en energía potencial elástica y es la que hace una vez que se retiran las cargas que produjeran la deformación, el cuerpo recupere su forma inicial.

Dicho en otras palabras todo el trabajo externo de deformación se ha transformado en trabajo interno que desarrollan las fuerzas internas durante la deformación.

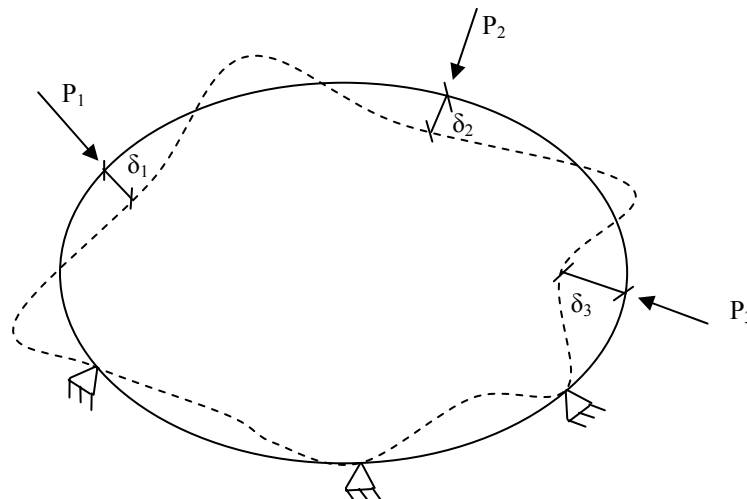
Por lo tanto, llamando  **$A_e$**  al trabajo de las fuerzas exteriores y  **$A_i$**  al de las fuerzas interiores y si se cumple lo expresado anteriormente (cargas estáticas, ausencia de roce y material elástico) se tiene:

$$A_e = A_i$$

En lo que sigue supondremos:

- El cuerpo se deforma siguiendo la ley de Hooke
- El sistema de fuerzas exteriores no varía con las deformaciones del cuerpo

Como consecuencia de esto surge que las deformaciones son funciones lineales de las cargas exteriores por lo que vale *el principio de superposición de efectos*.



Sea un cuerpo elástico sometido a fuerzas  $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots, P_n$  y sean  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k, \dots, \delta_n$  las componentes de los desplazamientos de los puntos de aplicación de las cargas, en la dirección de las mismas. Como el sistema es conservativo, el valor de la energía interna acumulada depende solo del valor final de las cargas y no de cómo fueron aplicadas y en que orden.

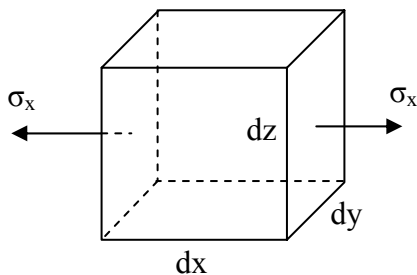
Supongamos que todas las cargas crezcan simultáneamente de 0 a su valor final, entonces en un instante cualquiera las cargas exteriores valdrían  $\alpha P_k$  (con  $\alpha$  variando entre 0 y 1) y como las deformaciones son proporcionales a las cargas, en ese instante valdrían  $\alpha \delta_k$ . En un instante siguiente  $\alpha$  se habrá incrementado en  $d\alpha$  y el desplazamiento  $\alpha \delta_k$  se habrá incrementado en  $(\alpha+d\alpha)\delta_k$  y la fuerza  $\alpha P_k$  realiza el trabajo  $\alpha P_k \cdot d\alpha \delta_k$ , por lo tanto el trabajo total de todas las fuerzas realizado desde 0 hasta su valor final será:

$$A_e = \sum_1^n \int_0^1 \alpha P_k \cdot \delta_k d\alpha = \frac{1}{2} \sum_1^n P_k \delta_k$$

Esta es la expresión matemática de Clapeyron: *“El trabajo realizado por las fuerzas que actúan estáticamente sobre un cuerpo elástico es independiente del orden en que se aplican dichas fuerzas y es igual a la mitad de la suma de los productos de los valores finales de las mismas por los desplazamientos de sus puntos de aplicación, medidos en las direcciones de las fuerzas”.*

Analicemos ahora el trabajo interno de deformación:

Consideremos un paralelepípedo elemental de aristas  $dx, dy, dz$  y que esté sometido a los efectos de una tensión en la dirección  $X$  y que varíe de 0 al valor  $\sigma_x$ , por lo tanto la deformación específica variará de 0 a  $\epsilon_x$ .



El trabajo será:

$$\frac{1}{2}(\sigma_x dy dz)(\epsilon_x dx)$$

$$\text{es decir } \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dV$$

y el trabajo por unidad de volumen será:

$$A^*i = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x$$

y para todo el cuerpo suponiendo solo tensiones  $\sigma_x$  se tendrá:

$$Ai = \frac{1}{2} \int_v \sigma_x \epsilon_x dV$$

En el caso más general se tendrá:

$$A^*i = \frac{1}{2} \left\{ \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} \right\} \quad (1)$$

Busquemos ahora una expresión del trabajo interno de deformación por unidad de volumen en función de las deformaciones.

Utilizando las ecuaciones de Lamé:

$$\sigma_x = 2G \left\{ \varepsilon_x + \frac{e}{m-2} \right\}; \quad \tau_{xy} = \gamma_{xy} G$$

$$\sigma_y = 2G \left\{ \varepsilon_y + \frac{e}{m-2} \right\}; \quad \tau_{yz} = \gamma_{yz} G$$

$$\sigma_z = 2G \left\{ \varepsilon_z + \frac{e}{m-2} \right\}; \quad \tau_{zx} = \gamma_{zx} G$$

reemplazando en la expresión (1)

$$A^*i = G \left\{ \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{e^2}{m-2} \right\} + \frac{G}{2} \left\{ \gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 \right\} \quad (2)$$

Si queremos expresar el trabajo específico interno de deformación en función de las tensiones:

Utilizando la ley de Hooke generalizada

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z) \right\}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z) \right\}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_x) \right\}$$

reemplazando en la expresión (1)

$$A^*i = \frac{1}{2E} \left\{ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) \right\} + \frac{1}{2G} \left\{ \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \right\} \quad (3)$$

Si derivamos la expresión (3) por cada una de las tensiones:

$$\frac{\partial A^*i}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = \varepsilon_x, \quad \text{análogamente:}$$

$$\frac{\partial A^*i}{\partial \sigma_y} = \varepsilon_y;$$

$$\frac{\partial A^*i}{\partial \sigma_z} = \varepsilon_z;$$

$$\frac{\partial A^*i}{\partial \tau_{xy}} = \gamma_{xy};$$

$$\frac{\partial A^*i}{\partial \tau_{yz}} = \gamma_{yz};$$

$$\frac{\partial A^*i}{\partial \tau_{zx}} = \gamma_{zx}$$

Si derivamos la expresión (2) por cada una de las deformaciones:

$$\frac{\partial A^*i}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x;$$

$$\frac{\partial A^*i}{\partial \varepsilon_y} = \sigma_y;$$

$$\frac{\partial A^*i}{\partial \varepsilon_z} = \sigma_z;$$

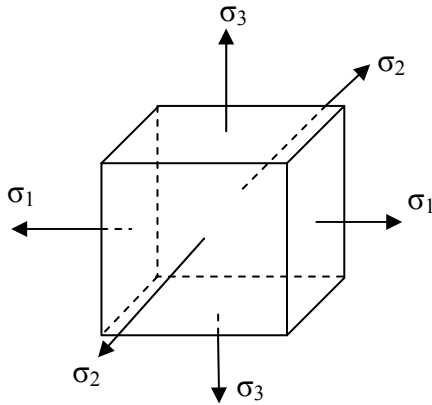
$$\frac{\partial A^*i}{\partial \gamma_{xy}} = \tau_{xy};$$

$$\frac{\partial A^*i}{\partial \gamma_{yz}} = \tau_{yz};$$

$$\frac{\partial A^*i}{\partial \gamma_{zx}} = \tau_{zx}$$

## TRABAJO DE DISTORSION

Consideremos un cuerpo sometido a cargas en equilibrio. De él tomemos un elemento de manera tal que sobre las caras del mismo no haya tensiones tangenciales, es decir solo sometido a tensiones principales.



Descomponemos este estado como la suma de dos:

$$\sigma_i = \sigma_m + (\sigma_i - \sigma_m)$$

$$\text{siendo } \sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

El estado  $\sigma_m$ , igual en todas las caras, es un estado correspondiente a presiones hidrostáticas (o tracción uniforme).

Analicemos ahora, cuanto vale la dilatación cúbica  $e$  para el estado  $(\sigma_i - \sigma_m)$

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$e = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)) + \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)) + \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_x))$$

$$e = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

entonces

$$e = \frac{1-2\mu}{E} [(\sigma_1 - \sigma_m) + (\sigma_2 - \sigma_m) + (\sigma_3 - \sigma_m)] = 0$$

Es decir que el estado  $(\sigma_i - \sigma_m)$  provoca una deformación del elemento sin que se altere el volumen, es decir habría solo deslizamientos, y las variaciones volumétricas son causadas solo por  $\sigma_m$ .

Observando la expresión de  $A^*_i$  se ve que es una función cuadrática de las tensiones, por lo que no es aplicable el principio de superposición, o sea que no se puede decir que aplicando un sistema de fuerzas compuesto de dos grupos o mas de fuerzas, el trabajo de deformación es igual a la suma de los trabajos que se obtendrían aplicando cada grupo separadamente. Esto se debe a que al aplicar un grupo de fuerzas estando otro aplicado, las tensiones primitivas debidas a este último, realizan un trabajo en las deformaciones que produce el segundo que no entra en ninguna de las expresiones de los trabajos provocados por cada uno separadamente.

En el caso que nos ocupa, el estado  $(\sigma_i - \sigma_m)$  solo produce deformaciones angulares, al estar aplicado el estado  $\sigma_m$ , este no realiza ningún nuevo trabajo, por lo tanto en este caso particular.

$$A_i^{*\sigma_i} = A_i^{*\sigma_m} + A_i^{*(\sigma_i - \sigma_m)}$$

Es decir que el trabajo específico de deformación se puede considerar como la suma de:

- a) Un trabajo de dilatación cúbica solamente,
- b) Un trabajo de deformación sin dilatación cúbica.

Este último trabajo provocado por  $(\sigma_i - \sigma_m)$  se lo llama trabajo de distorsión.

El valor de  $A_i^{*\sigma_i} = \frac{1}{2E} \{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \}$

y  $A_i^{*\sigma_m} = \frac{1}{2} \{ \sigma_m \varepsilon_{m1} + \sigma_m \varepsilon_{m2} + \sigma_m \varepsilon_{m3} \} = \frac{3}{2} \sigma_m \varepsilon_m$

donde  $\varepsilon_m = \frac{1}{E} (\sigma_m - 2\mu\sigma_m) = \frac{1-2\mu}{E} \sigma_m$

que reemplazando en la expresión anterior

$$A_i^{*\sigma_m} = \frac{3}{2} \sigma_m \cdot \frac{1-2\mu}{E} \sigma_m = \frac{3(1-2\mu)}{2E} \sigma_m^2 = \frac{3(1-2\mu)}{2E} \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{9}$$

$$A_i^{*\sigma_m} = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

Luego  $A_{id}^* = A_i^{*(\sigma_i - \sigma_m)} = A_i^{*\sigma_i} - A_i^{*\sigma_m}$

Entonces

$$A_{id}^* = \frac{1}{2E} \{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \} - \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

El último sumando:

$$\frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{1-2\mu}{6E} \{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \}$$

Reemplazando:

$$A_{id}^* = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) \left\{ \frac{1}{2E} - \frac{1-2\mu}{6E} \right\} + 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \left\{ \frac{-\mu}{2E} - \frac{1-2\mu}{6E} \right\}$$

$$A_{id}^* = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) \frac{2+2\mu}{6E} + 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \frac{-1-\mu}{6E}$$

$$A_{id}^* = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1))$$

En general para materiales metálicos  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$

$$A_{id}^* = \frac{1}{12G} (2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_3\sigma_1)$$

Entonces

$$A_{id}^* = \frac{1}{12G} \left\{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right\}$$

$$A_{id}^* = \frac{1}{3G} \left\{ \tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2 \right\}$$



## CRITERIOS DE ROTURA

Hasta aquí se han estudiado las relaciones que existen entre las tensiones que actúan en un punto de una dada sección, según los distintos planos que pasan por el mismo, es así como en el plano surgían dos direcciones normales entre sí según las cuales las tensiones eran máximas denominándose tensiones principales; y en el espacio se tenían tres. Además en estos planos las tensiones de corte eran nulas. Luego se vio, en el caso de materiales elásticos con una ley tensión – deformación lineal (Hooke), las relaciones entre esas tensiones y las respectivas deformaciones asociadas a las mismas. Finalmente se estudió las relaciones existentes entre esas tensiones y deformaciones con la energía interna acumulada en esas deformaciones. Se puede decir entonces que tenemos perfectamente definido el estado tensional a que está sometido un cuerpo bajo un sistema de cargas en equilibrio.

Ahora bien, como uno de los objetivos del diseño estructural es el de definir estructuras que resistan las cargas a las que van a estar sometidas con un adecuado margen de seguridad respecto a las que provocarían el colapso de aquellas, es que nos encontramos en la necesidad de estudiar bajo que condiciones se produce dicha situación de colapso. Definimos primeramente que entendemos por colapso de una estructura: *“decimos que una estructura alcanza el estado límite cuando las solicitaciones llegan a un valor tal que hace que la estructura trabaje en márgenes de seguridad inferiores para los cuales ha sido proyectada”*. Así en el caso de materiales dúctiles (que son aquellos que experimentan grandes deformaciones antes de llegar a la rotura física, generalmente con un escalón de fluencia), el colapso de la estructura se produce cuando el material llega a fluencia, porque las grandes deformaciones que se producen inhabilitan a la misma para su uso. En el caso de materiales frágiles, el colapso de la estructura coincide con la rotura física del material.

Es así entonces que se han formulado diversas hipótesis que tratan de interpretar el fenómeno de rotura de los distintos materiales. Algunas de estas distintas teorías de rotura están basadas en los siguientes conceptos:

- I) Basadas en las tensiones
  - a) Tensiones normales
  - b) Tensiones tangenciales
- II) Basadas en las deformaciones
- III) Basadas en la energía de deformación
  - a) Energía total de deformación
  - b) Energía de distorsión

Todas estas teorías han sido acompañadas de numerosos ensayos de comprobación. Evidentemente la elección de una u otra teoría dependerá fundamentalmente del material que estemos utilizando. En otras palabras sería equivocado usar una teoría que interprete la rotura de un material frágil en el caso de una estructura de acero, ya que el mismo es un material dúctil.

Analizaremos en adelante las principales teorías de rotura y sus respectivos campos de aplicación.

### 1.- Teoría de Rankine:

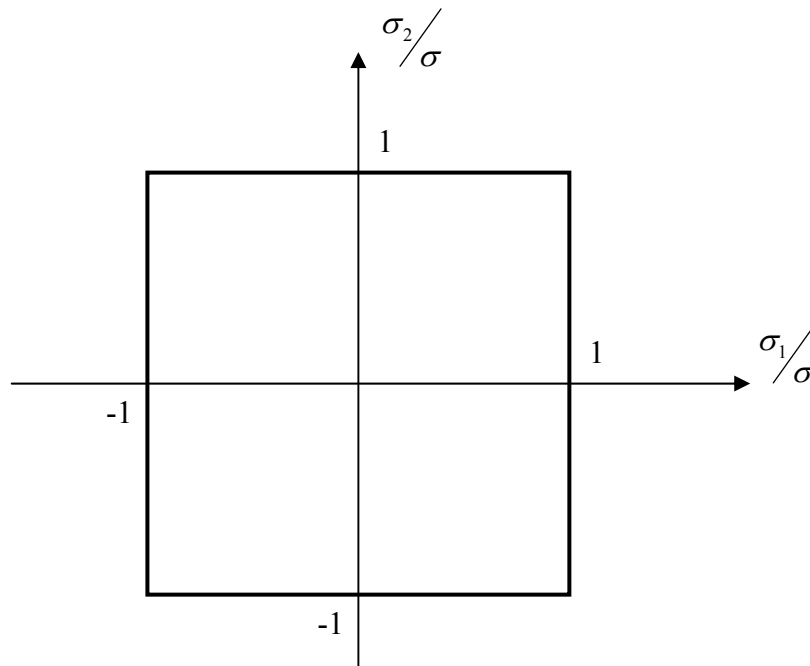
*“La rotura en un elemento sometido a un estado combinado de tensiones se alcanza cuando la máxima tensión principal normal se hace igual a la tensión de rotura en el ensayo estático simple.”*

$$\sigma_1 \leq \pm\sigma \quad \text{si } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

$$\sigma_2 \leq \pm\sigma \quad \text{si } \sigma_2 > \sigma_3 > \sigma_1$$

$$\sigma_3 \leq \pm\sigma \quad \text{si } \sigma_3 > \sigma_1 > \sigma_2$$

Esta hipótesis funciona bien en el caso de materiales frágiles (como la fundición). Sometida una probeta a un ensayo de tracción se comprueba que la rotura se produce en aquellos planos donde las tensiones de tracción son máximas, entonces todas aquellas teorías que tengan en cuenta las tensiones normales o las deformaciones específicas asociadas serán de aplicación.



## 2.- Teoría de Guest: (de la máxima tensión de corte)

“La rotura de un cuerpo sometido a un estado combinado de tensiones se alcanza cuando la máxima tensión de corte es igual a la máxima tensión de corte alcanzada en el ensayo estático simple.”

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \leq \frac{\sigma}{2}$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 \leq \sigma$$

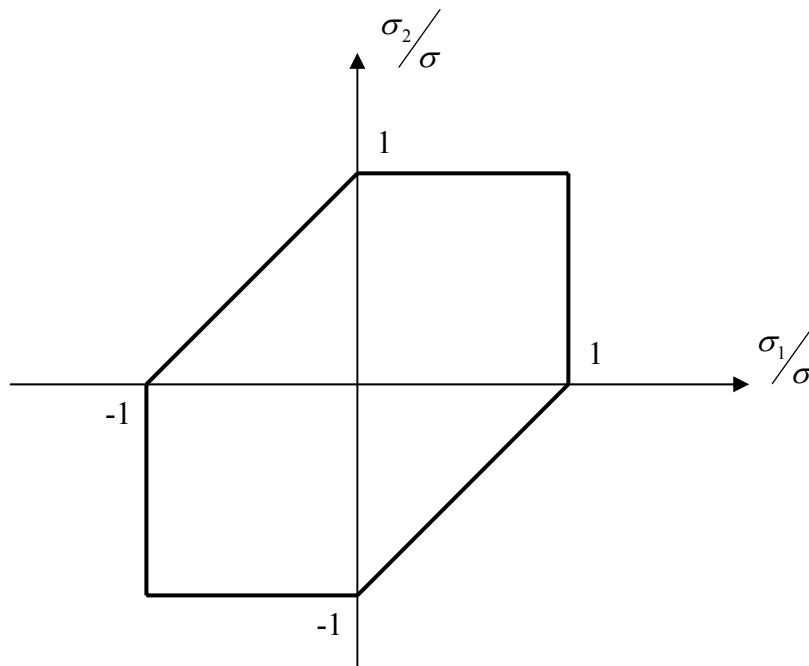
$$\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \leq \frac{\sigma}{2}$$

En el plano  $\sigma_1 \leq \sigma$

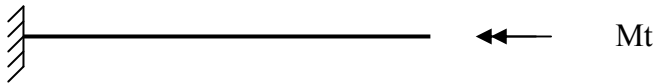
$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \frac{\sigma}{2}$$

$$\sigma_2 \leq \sigma$$

Esta hipótesis es de aplicación para el caso de materiales dúctiles. En el caso de tensiones del mismo signo coincide con la de Rankine.

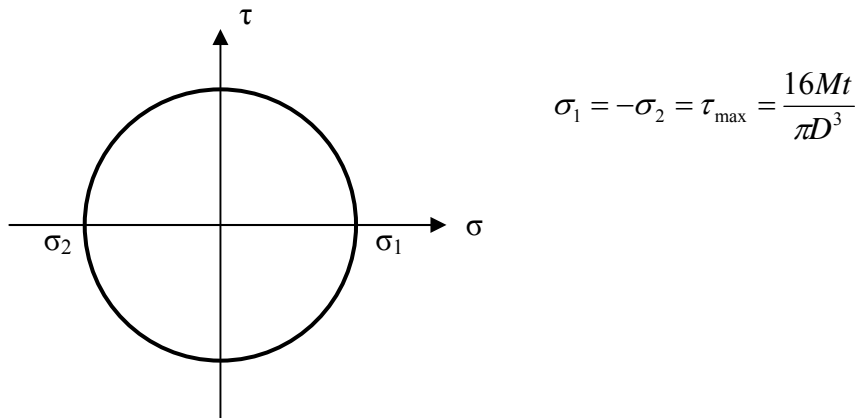


Por ejemplo sea el caso de una barra de sección circular sometida a torsión:



$$\tau_{\max} = \frac{Mt}{J_p} R = \frac{MtD}{2 \frac{\pi D^4}{32}} = \frac{16Mt}{\pi D^3}$$

Entonces las tensiones principales serán:



Si aplicamos Rankine:

$$\sigma_1 \leq \sigma_f \quad \Rightarrow \quad \frac{16Mt}{\pi D^3} \leq \sigma_f \quad \Rightarrow \quad D \geq \sqrt[3]{\frac{16Mt}{\pi \sigma_f}}$$

Mientras que aplicando Guest:

$$\sigma_1 - \sigma_2 \leq \sigma_f \quad \Rightarrow \quad 2 \frac{16Mt}{\pi D^3} \leq \sigma_f \quad \Rightarrow \quad D \geq \sqrt[3]{\frac{32Mt}{\pi \sigma_f}}$$

Vemos que por Guest se obtiene un diámetro mayor. En el caso de un material dúctil el haber utilizado Rankine nos habría conducido a un resultado erróneo y del lado inseguro. Esto se debe a que Rankine no sirve para materiales dúctiles porque en éstos la rotura se produce por deslizamientos entre cristales, por lo tanto hay que utilizar aquellas teorías que tengan en cuenta las tensiones tangenciales.

Una falla de la hipótesis de Guest se evidencia cuando las tres tensiones son de tracción, pues se produce una rotura frágil que esta teoría no interpreta.

**Nota:** Los gráficos de las siguientes teorías se hacen en comparación con el gráfico de Guest.

3.- **Teoría de Saint Venant:** (de la máxima deformación específica principal)

*“La rotura de un cuerpo sometido a un estado combinado de tensiones se produce cuando la deformación específica en la dirección de la máxima tensión principal alcanza el valor de la máxima deformación específica que se produce en el ensayo estático simple.”*

Esta hipótesis debería usarse para materiales frágiles por que tiene en cuenta las deformaciones normales. Esta hipótesis se aparta de los resultados experimentales.

Aplicando la ley de Hooke generalizada:

$$\varepsilon_1 = \pm \frac{1}{E} \{ \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \}$$

$$\varepsilon_2 = \pm \frac{1}{E} \{ \sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3) \} \quad \text{a su vez: } \varepsilon_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{E}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} \{ \sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1) \}$$

Entonces se debe verificar:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \leq \pm \varepsilon_{\max} \\ \varepsilon_2 \leq \pm \varepsilon_{\max} \\ \varepsilon_3 \leq \pm \varepsilon_{\max} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sigma_1 - \mu\sigma_2 - \mu\sigma_3 \leq \pm \sigma_{\max} \\ \sigma_2 - \mu\sigma_1 - \mu\sigma_3 \leq \pm \sigma_{\max} \\ \sigma_3 - \mu\sigma_2 - \mu\sigma_1 \leq \pm \sigma_{\max} \end{cases}$$

En el plano:

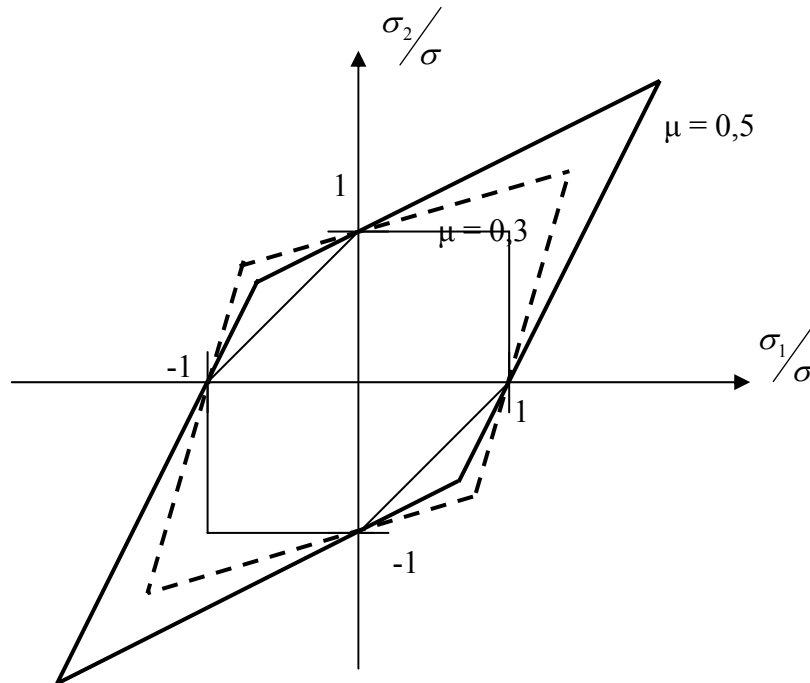
$$\begin{aligned} \sigma_1 - \mu\sigma_2 &\leq \pm \sigma_{\max} \\ \sigma_2 - \mu\sigma_1 &\leq \pm \sigma_{\max} \end{aligned}$$

Como se ve, esta hipótesis está formulada para materiales que siguen la ley de Hooke, por lo tanto  $\sigma_{\max}$  debe ser  $\sigma_f$ .

Representación en el diagrama:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{\max}} - \mu \frac{\sigma_2}{\sigma_{\max}} = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\sigma_1}{\sigma_{\max}} = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_2}{\sigma_{\max}} = \mp \frac{1}{\mu} \\ \frac{\sigma_2}{\sigma_{\max}} = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_{\max}} = \pm 1 \end{cases}$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_{\max}} - \mu \frac{\sigma_1}{\sigma_{\max}} = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\sigma_2}{\sigma_{\max}} = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_{\max}} = \mp \frac{1}{\mu} \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_{\max}} = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_2}{\sigma_{\max}} = \pm 1 \end{cases}$$



4.- **Teoría de Beltrami:** (del trabajo de deformación)

“La rotura de un cuerpo sometido a un estado combinado de tensiones se alcanza cuando el trabajo interno específico de deformación de las tensiones principales en un dado elemento, es igual al trabajo interno específico de deformación para la rotura elástica en el ensayo estático simple.”

Evidentemente al hablar de trabajo interno de deformación, estamos hablando de materiales elásticos y por consiguiente de rotura elástica.

$$\frac{1}{2E} \{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \} \leq \frac{\sigma_{\max}^2}{2E}$$

En el plano:

$$\{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2) \} \leq \sigma_{\max}^2$$

$$\left( \frac{\sigma_1}{\sigma_{\max}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_{\max}} \right)^2 - 2\mu \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_{\max}^2} \leq 1$$

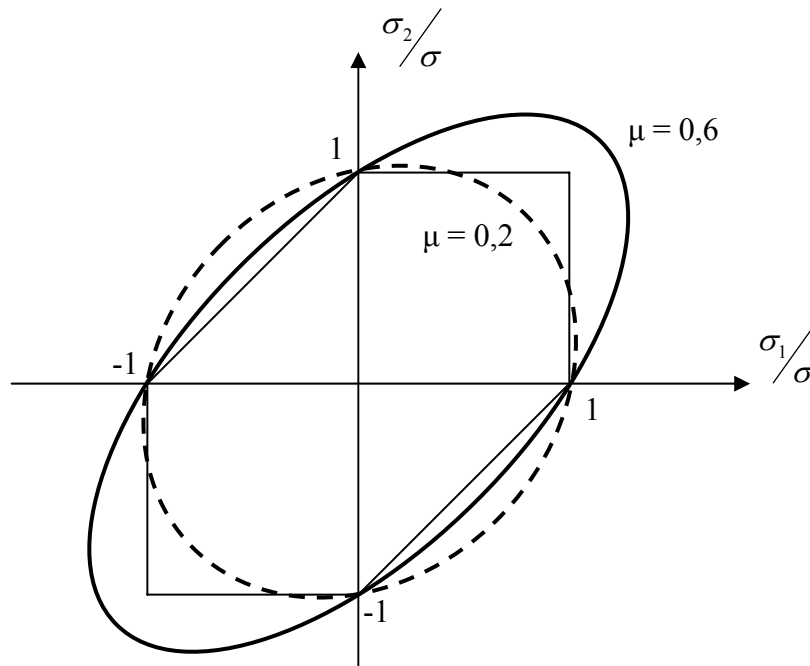
Para poder representar esta expresión en el diagrama, hallamos los ejes de la elipse:

$$1) \frac{\sigma_1}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_{\max}} \rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-\mu)}}$$

$$\mu = 0,2 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_{\max}} = 0,8 ; \quad \mu = 0,6 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_{\max}} = 1,12$$

$$2) \frac{\sigma_1}{\sigma_{\max}} = -\frac{\sigma_2}{\sigma_{\max}} \rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{2(1+\mu)}}$$

$$\mu = 0,2 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_{\max}} = 0,64 ; \quad \mu = 0,6 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_{\max}} = 0,56$$



Se observa en el gráfico que esta hipótesis se acerca más a la de Guest que a la de Rankine. Se la utiliza para materiales dúctiles.

Ensayos posteriores han permitido alcanzar presiones triaxiales elevadas con energías de deformación mayores que la correspondiente a fluencia en la sollicitación simple.

Esto hizo pensar que no toda la energía de deformación influye en el comienzo de la fluencia. Así es como surgió la teoría siguiente que considera solo la energía de distorsión.

### 5.- Teoría de Huber – Mises – Hencky (H-M-H):

“La rotura de un cuerpo sometido a un estado combinado de tensiones se alcanza cuando el trabajo específico de distorsión de un elemento dado alcanza el trabajo específico de distorsión correspondiente a la rotura elástica en el ensayo estático simple.”

$$A_{id}^* = \frac{1}{12G} \left\{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right\}$$

En el ensayo estático simple

$$A_{id}^* = \frac{1}{12G} 2\sigma_{\max}^2 \quad \text{por lo tanto}$$

$$2\sigma_{\max}^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

$$\sigma_{\max}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3$$

En el plano

$$\sigma_{\max}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2$$

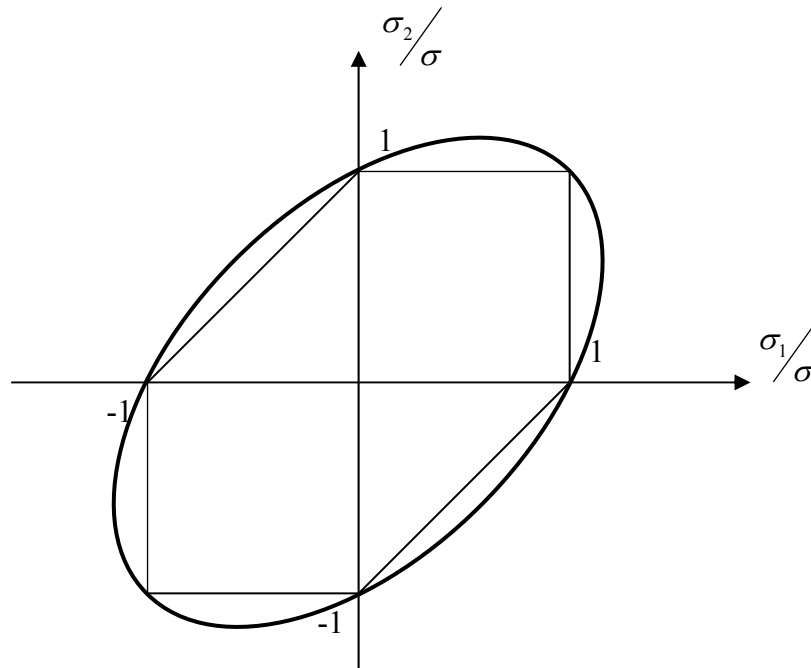
Nuevamente se obtiene la ecuación de una elipse. Para poder representar esta expresión en el diagrama, hallamos los ejes:

$$\left( \frac{\sigma_1}{\sigma_{\max}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_{\max}} \right)^2 - \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_{\max}} \right) \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_{\max}} \right) = 1$$

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_{\max}} = 0 &\Rightarrow \frac{\sigma_2}{\sigma_{\max}} = \pm 1 \\ \frac{\sigma_2}{\sigma_{\max}} = 0 &\Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_{\max}} = \pm 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_{\max}} &\rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_{\max}} = \pm 1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_{\max}} \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_{\max}} = -\frac{\sigma_2}{\sigma_{\max}} &\rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_{\max}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm 0,58 = -\frac{\sigma_2}{\sigma_{\max}} \end{aligned}$$





Como se observa en el gráfico, esta hipótesis está representada por un elipse que se aproxima bastante a Guest y es de utilización generalizada para materiales dúctiles, y se la prefiere frente a la de Guest porque permite un mejor aprovechamiento del material y se acerca más a los resultados experimentales.

#### Ejemplo de aplicación:

Verificar usando Guest y luego H-M-H un recipiente cilíndrico de 85 cm de diámetro interno y 0,3 cm de espesor sometido a una presión interna de  $P_i = 11 \text{ Kg/cm}^2$  y un momento torsor  $M_t = 15 \text{ Tm}$ . El material tiene una tensión admisible  $\sigma_{adm} = 1600 \text{ Kg/cm}^2$ .

$$\sigma_y = \frac{P_i D}{2\delta} = \frac{11.85}{2.0,3} = 1560 \text{ Kg/cm}^2 \quad (\text{Tensión radial})$$

$$\sigma_x = \frac{\sigma_y}{2} = 780 \text{ Kg/cm}^2 \quad (\text{Tensión longitudinal})$$

$$\tau_{xy} = \frac{M_t}{2A_m \delta} = \frac{1500000}{2 \cdot \frac{\pi \cdot 85^2 \cdot 0,3}{4}} = 438 \text{ Kg/cm}^2 \quad (\text{Tensión de corte})$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 = 1760 \text{ Kg/cm}^2 \quad \sigma_2 = 584 \text{ Kg/cm}^2$$

Guest:  $\sigma_1 = 1760 > \sigma_{adm}$  No verifica

H-M-H  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = 2410816 < 2560000 = \sigma_{adm}^2$  Verifica

Se observa que Guest es una teoría mas conservativa que H-M-H.

Veamos ahora que forma toma la teoría de H-M-H en función de las tensiones  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$ :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = a + b$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = a - b$$

$$\sigma_1^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\sigma_2^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{Reemplazando en} \quad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 \leq \sigma_{adm}^2$$

$$\sigma_1\sigma_2 = a^2 - b^2$$

$$\sigma_{adm} = \sqrt{a^2 + 3b^2}$$

$$\sigma_{adm} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$$

En el caso que  $\sigma_y = 0$

$$\sigma_{adm} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2}$$

El término en la raíz es lo que se llama tensión de comparación.

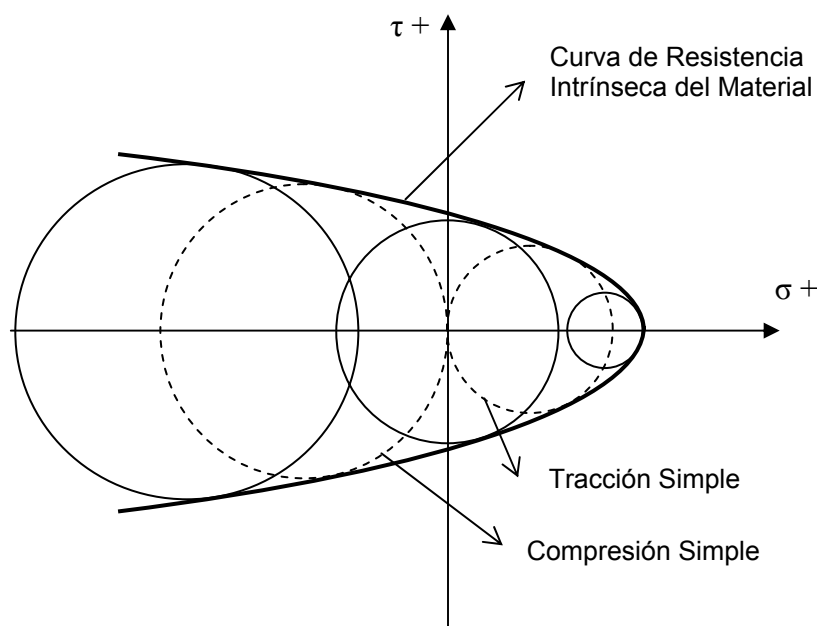
## 6.- Teoría de Mohr:

A diferencia de las teorías enunciadas hasta aquí, ésta supone que el mecanismo de rotura de los cuerpos depende no solo de las tensiones normales o tangenciales sino de ambas a la vez.

Es decir que el estado de rotura de un material queda definido por las tensiones normales y tangenciales que se desarrollan en el plano de deslizamiento y fractura.

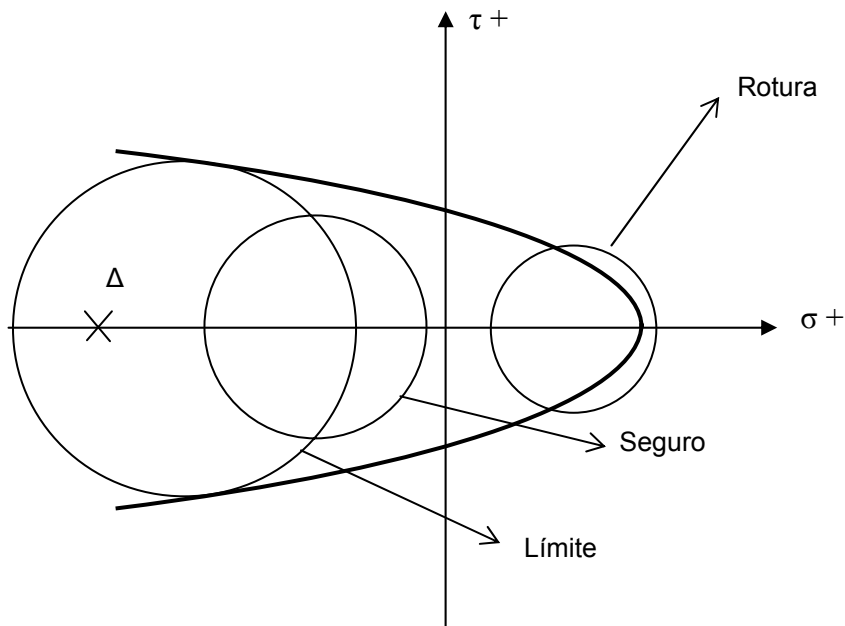
Esta teoría es aplicable a materiales frágiles y dúctiles, usándose mucho para el estudio de la resistencia de los suelos.

Sometido un cuerpo a un estado de tensiones dado, haciendo crecer ese estado tensional, las tensiones principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  crecerán hasta que se produzca la rotura (rotura física para materiales frágiles y fluencia para materiales dúctiles). Alcanzado ese estado se podrá trazar el círculo correspondiente que será un círculo de rotura, indicándonos todos sus puntos, las combinaciones de  $\sigma$  y  $\tau$  en cada dirección en el instante en que se produce la rotura. Repitiendo esto para otros estados tensionales tendremos otros círculos de rotura.



Se obtiene así una curva envolvente a todos los círculos, que se denomina Curva de Resistencia Intrínseca (CRI) del material que será tangente a las distintas circunferencias de rotura. Esta curva nos está indicando la combinación de tensiones  $\sigma$  y  $\tau$  actuando en el plano de rotura en el momento en que se produce la rotura.

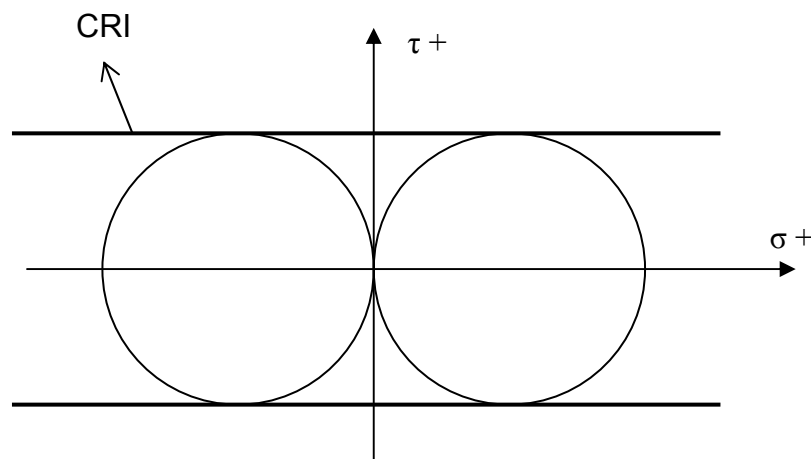
La forma de emplear esta teoría es la siguiente: Conocida la CRI y el estado tensional a que va a estar sometido el cuerpo, se traza el correspondiente círculo de Mohr. Si éste corta a la CRI se producirá la rotura; si es tangente, estará en el estado límite y si no la corta habrá un margen de seguridad tanto mayor cuanto mas alejado esté de la CRI.



Un estado de tensión hidrostática  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 < 0$  (punto  $\Delta$  de la figura) siempre va a estar dentro de la zona de seguridad y nunca va a ocurrir la rotura (Así se justifica que los materiales a grandes profundidades no rompen).

Las curvas como las dibujadas corresponden a materiales frágiles con resistencia a la tracción muy inferiores a la resistencia a la compresión. En este caso se puede mencionar el hormigón, en donde se puede aumentar la resistencia a la compresión en una dirección si se aumenta la compresión en la dirección normal.

En el caso de un material como el acero, donde la tensión de fluencia a compresión y a tracción coinciden, se tiene:



Se observa que  $\tau_f \approx 0,5\sigma_f$  de acuerdo a esta teoría.

## TABLA COMPARATIVA

Teoría	Materiales	Limitaciones	Observaciones
Rankine	Frágiles	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. No toma en cuenta el tipo de esfuerzo normal (Tracción o compresión) ni la orientación.</li> <li>2. Solo válida para materiales isótropos</li> </ol>	Es mas exacta que Beltrami para materiales frágiles
Guest	Dúctiles	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. En materiales cuyos esfuerzos cortantes son grandes y no sometido a esfuerzos triaxiales hidrostáticos.</li> <li>2. No tiene en cuenta la orientación del esfuerzo.</li> <li>3. Solo válida para materiales isótropos</li> </ol>	Usada en diseño de estructuras de acero
Saint Venant		<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Se debe conocer la ley general de tensión – deformación. Con inconvenientes para roturas plásticas.</li> <li>2. No tiene en cuenta la orientación de las deformaciones principales.</li> <li>3. Solo válida para materiales isótropos.</li> </ol>	Prácticamente sin uso
Beltrami	Muy frágiles o inicio de fluencia en dúctiles	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. De aplicación compleja cuando el estado de esfuerzo es arbitrario y el material anisótropo.</li> <li>2. La de Rankine es mejor para materiales frágiles y para el inicio de fluencia es mas exacta H-M-H.</li> </ol>	Considera orientación del esfuerzo por manejar una cantidad escalar
H-M-H	Dúctiles	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. De aplicación compleja cuando el estado de esfuerzo es arbitrario y el material anisótropo.</li> </ol>	Considera orientación del esfuerzo por manejar una cantidad escalar. Es la mas exacta para materiales dúctiles
Mohr	Todos	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Obtención de envolvente</li> </ol>	Abarca casi todos los materiales. Usada en mecánica de suelos