

**Facultad de Ingeniería  
Universidad Nacional de La Plata**



# **ESTRUCTURAS III**

## ***Pandeo Elástico de Barras***

Ing. Marcos Daniel Actis  
Ing. Juan Pablo Durruty  
Sr. Julio. A. Guimmarra

# PANDEO ELASTICO DE BARRAS

## Introducción

En el estudio de los cuerpos sometidos a tracción, compresión, flexión, corte y torsión, se ha visto que el problema consiste en determinar la ley que relaciona las tensiones máximas en función de los esfuerzos y las dimensiones de la pieza en estudio.

Dichas ecuaciones se obtienen, en general, estableciendo las ecuaciones de equilibrio estático, de compatibilidad y las de borde.

Con las ecuaciones obtenidas vimos como se dimensionaba y como se podían calcular las deformaciones de las piezas proyectadas.

En la técnica se representaban las piezas que, calculadas en la forma indicada anteriormente, se rompían debido a que, bajo la acción de las cargas, la forma originaria de la estructura dejaba de ser estable, es decir que por cualquier causa (por pequeña que esta sea) la estructura pierde completamente su forma original, destruyéndose.

Para interiorizarnos mejor en el problema, consideremos una barra AB de eje recto, sobre la cual actúan dos cargas P de compresión según el eje de la barra.

De acuerdo a nuestros conocimientos, el cálculo de la sección lo hacemos considerando que la barra está sometida a compresión, luego:

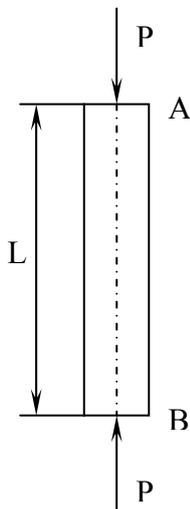
$$A = \frac{P}{\sigma_{adm}}$$

Como vemos, calculada así la barra, la sección necesaria para soportar P es indiferente de la longitud L de la misma. Además consideramos que la barra es de eje idealmente recto, de un material idealmente homogéneo y que las fuerzas se encuentran idealmente centradas. La experiencia demuestra que, si se parte de la longitud L para la cual la barra no se rompe, aumentamos su longitud, llega un momento en que la barra pierde su forma, rompiéndose.

Esto es debido a que se ha puesto de manifiesto una causa extraña a la prevista y que dicha causa aparece cuando aumenta la longitud. Es lógico pensar que la causa posible es alguna de las tres condiciones (o parte, o las tres conjuntamente) ideales:

1. Eje idealmente recto.
2. Material idealmente homogéneo.
3. Fuerzas idealmente centradas.

Analizando el fenómeno nuevamente, podemos decir que para ciertas longitudes la barra era estable y que, llegando a un cierto valor de L, se volvió inestable.



Por lo tanto no se puede calcular una barra sometida a compresión mediante la formula:

$$A = \frac{P}{\sigma_{adm}}$$

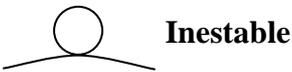
pues su longitud puede ser tal que ésta no sea estable.

Nos proponemos entonces ver la forma de calcular la barra de manera que sea estable, teniendo en cuenta la longitud L.

Para ello comencemos por analizar el equilibrio de los cuerpos rígidos.

**Equilibrio estable, inestable e indiferente:**

Sabemos que es condición necesaria pero no suficiente, para que la configuración de un cuerpo o sistema de cuerpos sea *permanente*, que el sistema de fuerzas esté en equilibrio. Dicha condición resulta suficiente si el equilibrio de las fuerzas es **estable**.



Si el equilibrio es **inestable**, la configuración es precaria, dado que hasta la más mínima perturbación hace que el sistema se aleje inmediatamente de la configuración que tiene, tendiendo a buscar otra que sea estable.

En el caso límite en que el equilibrio es **indiferente**, el sistema puede permanecer en la configuración inicial o en cualquier otra próxima a la primera sin que el equilibrio se altere.

Una forma clásica de saber en que estado de equilibrio se encuentra un sistema es apartarlo un infinitésimo de la configuración inicial y ver si, al cesar la perturbación, el sistema vuelve espontáneamente a la configuración de equilibrio o se aparta de ella. Interesa especialmente decidir cuando el equilibrio es indiferente, pues es el caso límite que separa el equilibrio **estable** del **inestable**.

Para decidir (sin hacer la experiencia) que es lo que tiende a hacer el sistema cuando lo apartamos de su posición de equilibrio, se examina como se modifican las fuerzas actuantes, o como cambia la energía total del sistema.

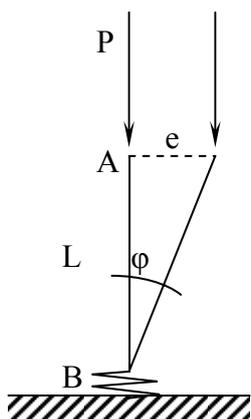
**El criterio estático y el criterio energético:**

Para decidir si una configuración en equilibrio es **estable** o **inestable**, se modifica infinitesimalmente la configuración, sin variar el valor de las fuerzas, y se examina si tiende a la posición primitiva o si se aleja de ella.

En la práctica conviene determinar el equilibrio **indiferente**, porque así se conoce la condición límite que separa las dos posibilidades.

Para efectuar tal estudio se puede usar un criterio **estático** o un criterio **energético**.

a) **Criterio estático:** en la configuración modificada, las fuerzas externas cambian su posición respecto al cuerpo y generan nuevos esfuerzos que tienden a alterar la configuración y nacen al mismo tiempo reacciones internas elásticas que tienden a llevarla a la posición primitiva. Resulta conveniente entonces determinar el valor de las fuerzas que igualan las dos tendencias, es decir, los valores críticos de las fuerzas que hacen el equilibrio indiferente.



Como ejemplo consideremos una barra rígida rectilínea y vertical, libre en A y elásticamente empotrada en B (un resorte, por ejemplo), cargada con una carga P en A. La reacción en B vale m para  $\phi=1$ . La configuración vertical es de equilibrio, porque P momento nulo respecto de B. Para decidir si el equilibrio es estable o no, apartamos la barra de la posición inicial (vertical) un ángulo  $\phi$ .

El momento exterior vale:

$$M_e = P \cdot L \cdot \text{sen} \phi$$

Y el apoyo reacciona con un momento:

$$M_a = m \cdot \phi$$

Estaremos en el caso de equilibrio **estable** si:  $M_e < M_a$

Será **inestable** si:  $M_e > M_a$

Y será **indiferente** si:  $M_e = M_a$

Como  $\varphi$  debe ser pequeño, podemos poner que:  $\text{sen } \varphi \approx \varphi$

Luego el estado crítico será:

$$M_e = M_a$$

Por lo tanto:

$$P \cdot L \cdot \varphi = m \cdot \varphi$$

De donde:

$$P_{\text{crítico}} = \frac{m}{L}$$

Para valores de  $P$  menores de  $P_{\text{cr}}$ , siempre que consideremos  $\varphi$  pequeños, la barra es **estable**, es decir se mantiene vertical.

Veamos un fenómeno interesante. Para ello planteamos la ecuación:

$$P = \frac{m}{L} \cdot \frac{\varphi}{\text{sen } \varphi}$$

Donde vemos que para  $\varphi > 0$ ,  $\frac{\varphi}{\text{sen } \varphi} > 1$

Resulta que si la  $P$  actuante es igual a  $P_{\text{cr}} = \frac{m}{L}$ , el equilibrio es **indiferente** al comienzo del giro y luego se vuelve **estable**. Además vemos que si actúa una  $P > P_{\text{cr}}$  la barra se desplaza hasta un ángulo  $\varphi$  en que se vuelve **estable**. Un fenómeno parecido sucede en las estructuras, con el inconveniente que para llegar a la deformación que equilibre el esfuerzo exterior sería necesario un material infinitamente elástico y resistente.

b) **Criterio energético**: cuando se varía la configuración primitiva equilibrada del sistema elástico, se tiene una variación del trabajo interno, que es un aumento, y una variación de la energía potencial de posición de las fuerzas, que es una disminución.

Sabemos que el equilibrio primitivo es **estable**, **inestable** o **indiferente** según que la energía total del sistema es aumentada, disminuida o permanece constante. Como nos interesa el caso de equilibrio **indiferente**, basta considerar como incógnita la fuerza necesaria para igualar el trabajo interno al externo y esto resulta del hecho de que la disminución de la energía potencial de las fuerzas depende de éstas y de las deformaciones, y la energía elástica acumulada depende de las deformaciones.

Aplicada al ejemplo de la barra rígida empotrada en un elástico, si damos un giro  $\varphi$ , en el resorte se acumula una energía elástica  $A_i$ , que depende de la característica  $m$  del resorte y de  $\varphi$ , y no de  $P$ :

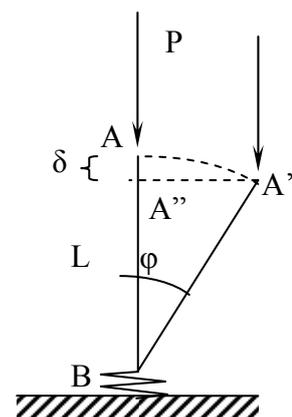
$$A_i = \frac{1}{2} (m \cdot \varphi) \cdot \varphi$$

La fuerza desarrolla un trabajo  $A_e$  que vale:

$$A_e = P \cdot \delta$$

En el estado de equilibrio **indiferente**:  $A_e = A_i$

Luego:  $P \cdot \delta = \frac{\varphi^2}{2} m$ , pero  $\delta = L \cdot (1 - \cos \varphi)$



$$\text{Por lo tanto: } P \cdot L \cdot (1 - \cos \delta) = \frac{m \cdot \varphi^2}{2}.$$

Como  $\varphi$  debe ser pequeño, desarrollando en serie el  $\cos \varphi$ , resulta:

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$$

$$\text{Por lo tanto: } 1 - \cos \varphi \approx \frac{\varphi^2}{2}$$

Resulta entonces:

$$P_{cr} = \frac{m}{L}$$

Analicemos el problema suponiendo que el sistema se encuentra en equilibrio para un ángulo  $\varphi = \varphi_0$ , es decir:

$$P_0 \cdot \delta_0 = \frac{m \cdot \varphi_0^2}{2}$$

$$\text{Por lo tanto: } P_0 \cdot L \cdot (1 - \cos \varphi_0) = \frac{m \cdot \varphi_0^2}{2}$$

Queremos ver si se encuentra en equilibrio estable o no. Para ello damos una variación a  $\varphi$  en  $d\varphi$ . En tal caso la energía de posición varía en:

$$\begin{aligned} \Delta A_e &= P_0 \cdot L(1 - \cos \varphi_0) - P_0 \cdot L[1 - \cos(\varphi_0 + d\varphi)] = \\ &= P_0 \cdot L[\cos(\varphi_0 + d\varphi) - \cos \varphi_0] = \end{aligned}$$

por Taylor:

$$\begin{aligned} &= P_0 \cdot L[\cos \varphi_0 - \text{sen}(\varphi_0)d\varphi - \cos \varphi_0] = \\ \Rightarrow \Delta A_e &= -P_0 \cdot L \cdot \text{sen}(\varphi_0)d\varphi \end{aligned}$$

Si  $d\varphi$  es un aumento, la variación de energía es una disminución, de ahí el signo negativo.

La energía potencial elástica ha variado en:

$$\Delta A_i = \frac{m}{2}(\varphi_0 + d\varphi)^2 - \frac{m}{2}\varphi_0^2 = \frac{m}{2}\varphi_0^2 + m\varphi_0 d\varphi + \frac{m \cdot d\varphi^2}{2} - \frac{m \cdot \varphi_0^2}{2} \quad (\text{a})$$

$$\Rightarrow \Delta A_i = m \cdot \varphi_0 d\varphi + m \cdot \frac{d\varphi^2}{2}$$

Por lo tanto:

$$\Delta E = m \cdot \varphi_0 d\varphi + m \frac{d\varphi^2}{2} - P_0 \cdot L \cdot \text{sen}(\varphi_0)d\varphi$$

$$\text{Dado que por razones de equilibrio estático } \Rightarrow P_0 \cdot L \cdot \text{sen} \varphi_0 = m \cdot \varphi_0$$

$$\text{Resulta } \Rightarrow -P_0 \cdot L \cdot \text{sen}(\varphi_0)d\varphi = -m \cdot \varphi_0 d\varphi \quad (\text{b})$$

Comparando las dos variaciones de energía (a) y (b) vemos que la energía total ha

$$\text{aumentado en: } \frac{m \cdot d\varphi^2}{2}$$

El equilibrio es estable, es decir que al principio el equilibrio es *indiferente*, pero luego se transforma en *estable*.

**Como se aplica el criterio estático:**

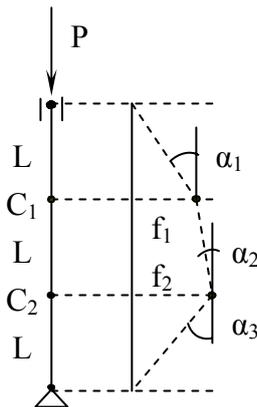
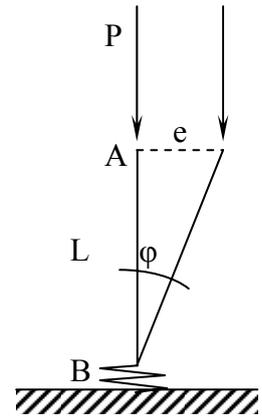
Ya hemos dicho que debemos modificar muy poco la configuración equilibrada y escribir la ecuación o las ecuaciones externas y las tensiones internas que corresponden a la nueva configuración, es decir, se impone que la nueva configuración sea también equilibrada (equilibrio *indiferente*).

El valor de la fuerza (o fuerzas) que se deducen de dicha ecuación y que hace al equilibrio *indiferente* es el valor crítico de la misma (o mismas).

Hay que distinguir entre estructuras de elementos rígidos vinculados entre sí por medios elásticos y las estructuras totalmente formadas de elementos elásticos. Ejemplos del primer grupo es el caso ya visto. Se trata de uno o pocos grados de libertad pues bastan pocos parámetros para definir su posición.

Si tenemos el caso de la estructura de la figura siguiente, formada por tres bandas rígidas de igual longitud  $L$ , vinculadas en  $C_1$  y  $C_2$  por uniones elásticas de características elásticas  $m_1$  y  $m_2$ , determinan  $P_{cr}$ .

En este caso la configuración depende de los dos parámetros  $f_1$  y  $f_2$  (de valores pequeñísimos).



Podemos escribir:  $\alpha_1 = \frac{f_1}{L}$ ,  $\alpha_2 = \frac{f_2 - f_1}{L}$  y  $\alpha_3 = \frac{f_2}{L}$

Los giros relativos en (1) y (2) se pueden escribir:

$$\varphi_1 = \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{f_1}{L} - \frac{f_2 - f_1}{L} = \frac{2f_1 - f_2}{L}$$

$$\varphi_2 = \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{f_2 - f_1}{L} + \frac{f_2}{L} = \frac{2f_2 - f_1}{L}$$

Las condiciones de equilibrio en las rótulas son:

$$P \cdot f_1 = \frac{m_1}{L} (2f_1 - f_2)$$

$$P \cdot f_2 = \frac{m_2}{L} (2f_2 - f_1)$$

Que podemos escribir:

$$\frac{P \cdot L}{m_1} = C_1 \Rightarrow (C_1 - 2) \cdot f_1 + f_2 = 0$$

$$\frac{P \cdot L}{m_2} = C_2 \Rightarrow (C_2 - 2) \cdot f_2 + f_1 = 0$$

Lo que constituye un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas ( $f_1$  y  $f_2$ ). Una solución sería  $f_1=f_2=0$ , que corresponde a la posición recta, que es lógicamente equilibrada.

Para que esté en equilibrio el sistema para otra configuración exige que  $f_1 \neq 0$  y  $f_2 \neq 0$ , y ello ocurrirá si la matriz del sistema es nula, es decir:

$$\begin{vmatrix} C_1 - 2 & 1 \\ 1 & C_2 - 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow C_1 C_2 - 2(C_1 + C_2) + 3 = 0, \text{ ecuación que corresponde al equilibrio } \textit{indiferente}.$$

Como  $C_1$  y  $C_2$  contienen a  $\underline{P}$ , si sustituimos sus valores, tenemos una ecuación de segundo grado en  $\underline{P}$ , que da los valores de  $\underline{P}_{cr}$  correspondientes a dos configuraciones. Supongamos, para obtener valores, que  $m_1=m_2$ , luego  $C_1 = C_2 = C = \frac{P \cdot L}{m}$ , entonces:

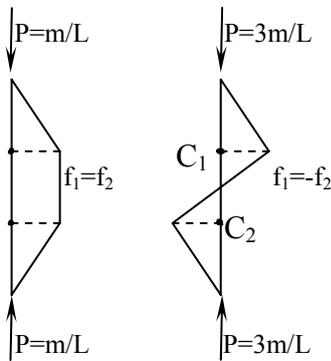
$$C^2 - 4C + 3 = 0$$

$$\Rightarrow C = \frac{+4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \Rightarrow \begin{matrix} C_1 = 3 \\ C_2 = 1 \end{matrix}$$

$$\text{Es decir: } P_{cr1} = 3 \frac{m}{L}, P_{cr2} = \frac{m}{L}.$$

La solución  $C=3$  corresponde a:  $(3-2) \cdot f_1 + f_2 = 0$ , es decir:  $f_1 = -f_2$ .

Y la solución  $C=1$  corresponde a:  $(1-2) \cdot f_1 + f_2 = 0$ , es decir:  $f_1 = f_2$ .



Como vemos, la menor carga crítica es para  $f_1 = f_2$  y la mayor para  $f_1 = -f_2$ , y su deformada nos muestra que el punto medio entre  $C_1$  y  $C_2$  no se desplaza, es decir como si se hubiera impuesto un vínculo en dicho punto, de ahí que dé mayor carga crítica.

Como vemos con los dos ejemplos analizados, para las estructuras rígidas con vínculos elásticos, las  $\underline{n}$  ecuaciones de equilibrio que expresan la igualdad de las sollicitaciones externas e internas en correspondencia de los  $\underline{n}$  vínculos elásticos, constituyen un sistema de  $\underline{n}$  ecuaciones homogéneas que corresponden a  $\underline{n}$  parámetros incógnitas. De la matriz del sistema hecha nula, que constituye la solución para el sistema **indiferente**, sacamos los valores críticos de las cargas (autovalores).

Obtenidos los valores críticos, las ecuaciones del sistema nos sirven para determinar la relación entre los valores de los parámetros de la deformación, llegándose a  $\underline{n}$  configuraciones posibles de equilibrio indiferente. Conviene destacar que no se obtienen los valores absolutos de las deformaciones sino la relación entre ellos para cada configuración.

Pasemos ahora al caso de las estructuras elásticas. En tales casos los desplazamientos que pueden imprimirse a cada punto son independientes entre sí y solo deben cumplir con la condición de continuidad de la estructura.

Entonces en estas estructuras tenemos infinitos grados de libertad, porque tenemos infinitos desplazamientos  $\underline{y}$ .

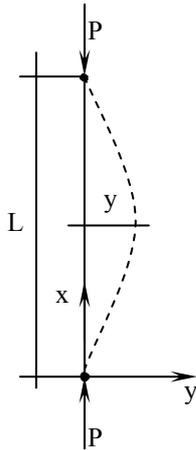
La aplicación de la condición de que el equilibrio sea **indiferente**, es decir que exista equilibrio entre las fuerzas externas e internas en cada punto de la estructura, lleva al establecimiento de un sistema de infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas, que podemos expresar mediante una ecuación diferencial que contiene a la función  $\underline{y}$ .

Para el caso de estructuras lineales (sin efecto de barra curva), dicha ecuación es:  $E \cdot J \cdot y'' = -M$ , ecuación de equilibrio para la flexión.

La solución de esta ecuación (equivalente a resolver un sistema de ecuaciones) nos da la función  $y = y(x)$  llamada autofunción, y las condiciones límites determinan los valores críticos de la carga (autovalores).

Aplicando lo anterior al caso de una barra recta con carga según su eje de compresión con la condición de que sus extremos solo pueden desplazarse según el eje, se tiene, dando una pequeña deformación:

$$\begin{matrix} E \cdot J \cdot y'' = -M, & M = P \cdot y \\ E \cdot J \cdot y'' = -P \cdot y \end{matrix}$$



$$\therefore E \cdot J \cdot y'' + P \cdot y = 0, \text{ llamando } \alpha^2 = \frac{P}{EJ}$$

obtenemos la ecuación:

$$y'' + \alpha^2 y = 0$$

Ecuación diferencial que debe cumplirse en todos los puntos de la barra.

La solución de esta ecuación es del tipo:

$$y = A \cdot \text{sen}(\alpha x) + B \cdot \text{cos}(\alpha x)$$

Las condiciones de borde de la barra establecen:

Para:  $x = 0 \rightarrow y = 0 \Rightarrow B = 0$   
 $\therefore y = A \cdot \text{sen}(\alpha x)$

Para:  $x = L \rightarrow y = 0$ , es decir:  $\text{sen}(\alpha L) = 0$   
 $\therefore 0 = A \cdot \text{sen}(\alpha L)$ ,  $\therefore \alpha L = n\pi$

$$\sqrt{\frac{P}{EJ}} \cdot L = n\pi, \text{ por lo tanto: } P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} EJ \text{ y la solución será: } y = A \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Los distintos valores que puede tomar  $n$  definen las infinitas posibilidades de solución.

El menor valor de  $P_{cr}$  es para  $n=1$  y corresponde a una configuración con  $y = 0$  solo en los apoyos. El que le sigue para  $n=2$  corresponde a una configuración con  $y = 0$  en tres puntos, es decir, en los dos apoyos y en el punto medio  $x = L/2$ .

El análisis hecho nos lleva a la solución que las configuraciones que corresponden a las distintas posibilidades del equilibrio **indiferente** son funciones sinusoidales. De manera que si partimos de este conocimiento la solución del problema puede hacerse sin resolver el sistema de infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas (integrar la ecuación diferencial), planteando la ecuación del equilibrio de fuerzas externas e internas en un solo punto.

Si elegimos el punto de medio y en él planteamos el equilibrio  $M_i = M_e$ , tenemos:

$$M_e = P \cdot y_{(x=L/2)},$$

$$M_i = (-EJ \cdot y'')_{x=L/2},$$

$$y = y_0 \text{sen}\left(\pi \frac{x}{L}\right), \text{ por lo tanto } y_{x=L/2} = y_0$$

$$y'' = -y_0 \frac{\pi^2}{L^2} \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right), \text{ por lo tanto } y''_{x=L/2} = -y_0 \frac{\pi^2}{L^2}.$$

Luego sustituyendo en la ecuación de equilibrio:

$$P_0 y_0 = -E \cdot J \cdot \left(-y_0 \frac{\pi^2}{L^2}\right),$$

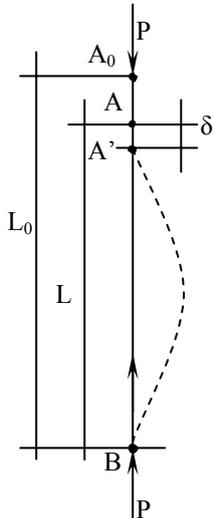
$$P_{cr} = \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{L^2}.$$

Si hubiéramos elegido otra ley para  $y$ , obtendríamos otro valor.

**Como se aplica el criterio energético:**

Como se ha dicho, otra forma para definir si una configuración es **estable** o **inestable**, es utilizando el criterio de que la energía total del sistema es mínima o máxima. Es decir, si modificando infinitesimalmente la configuración del sistema, la energía total del mismo aumenta, el equilibrio es **estable**; si disminuye es **inestable**.

Si la energía permanece constante el equilibrio es **indiferente**.



Por ejemplo, en el caso de una barra  $A_0B$ , cargada axialmente con dos cargas  $\underline{P}$  de compresión, se acorta pasando de  $A_0$  a  $A$  y acortándose en  $\Delta L = L_0 - L$ .

Si por una causa extraña hacemos que la barra tome la forma curva  $A'B$ , a carga  $\underline{P}$  descendiende  $\delta = AA'$  y realiza un trabajo:  $\Delta A_e = P \cdot \delta$ .

Que representa la disminución de la energía potencial de posición. Al mismo tiempo en la barra se acumula la energía interna de flexión  $\Delta A_i$  que se suma a la energía potencial elástica existente de compresión.

La energía total disminuye en  $\Delta A_e = P \cdot \delta$  y aumenta en  $\Delta A_i$ ; o sea varia en:

$$\Delta U = \Delta A_i - \Delta A_e$$

Si la variación es positiva,  $\underline{U}$  tenía un valor mínimo, correspondiendo al equilibrio **estable**; si la variación es negativa,  $\underline{U}$  tenía un valor máximo, correspondiendo al equilibrio **inestable**. Si  $\Delta U = 0$ ,  $\underline{U}$  no varía y el equilibrio es **indiferente**. Este es el caso que interesa, pues determina la  $\underline{P}_{cr}$ , que separa los dos campos.

Es importante destacar que admitida una configuración "muy próxima" a la posición recta, o sea flexionando la barra, resulta definido el  $\Delta A_i$  y  $\delta$  que no depende de  $\underline{P}$ , de manera que si  $\underline{P}$  es pequeña se tendrá  $P \cdot \delta < \Delta A_i$  y si  $\underline{P}$  es muy grande se tendrá  $P \cdot \delta > \Delta A_i$ . Lógicamente existirá un valor de  $\underline{P}$  tal que  $P \cdot \delta = \Delta A_i$  y dicho valor es el  $\underline{P}_{cr}$ .

Por lo tanto:

$$P_{cr} = \frac{\Delta A_i}{\delta}$$

El valor de  $\underline{\delta}$  lo podemos escribir igual a  $\Delta A_{e1}$  (por el teorema de Castigliano), es decir el trabajo de una  $P=1$ , entonces:

$$P_{cr} = \frac{\Delta A_i}{\Delta A_{e1}} \quad (1)$$

También  $\Delta A_i$  se puede escribir en función de  $P^2$ . Podemos poner  $\Delta A_i = P^2 \Delta A_{i1}$ , entonces  $P_{cr} \Delta A_{e1} = P_{cr}^2 \Delta A_{i1}$  de donde:

$$P_{cr} = \frac{\Delta A_{e1}}{\Delta A_{i1}} \quad (2)$$

Vemos así distintas formas de expresar  $\underline{P}_{cr}$ . Estudiaremos el caso particular de una barra de sección constante, articulada en sus extremos. Sea  $y = y(x)$  la ecuación de la elástica que adopta la barra cuando se deforma un infinitésimo.

El valor de  $\underline{\delta}$  lo podemos calcular por diferencia entre la longitud de la elástica y la de la cuerda, es decir:

$$\delta = \int_0^L (ds - dx) = \int_0^L \left( \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} - dx \right) = \int_0^L \left( \sqrt{1 + \bar{y}'^2} - 1 \right) dx$$

Como consideramos una curva muy achatada,  $(y')^2$  es una cantidad pequeña frente a la unidad, por lo tanto:

$$(1 + \bar{y}'^2)^{1/2} = 1 + \frac{\bar{y}'^2}{2} - \frac{\bar{y}'^4}{8} + \frac{\bar{y}'^6}{16} - \dots$$

$$\cong 1 + \frac{\bar{y}'^2}{2}$$

Entonces:

$$\delta = \int_0^L \left( 1 + \frac{\bar{y}'^2}{2} - 1 \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \bar{y}'^2 dx.$$

En cuanto al valor de la variación del trabajo interno por flexión:

$$\Delta A_i = \int_0^L \frac{M^2}{2 \cdot EJ} dx = \int_0^L \frac{(-EJ \cdot y'')^2}{2 \cdot EJ} dx = \frac{EJ}{2} \int_0^L \bar{y}''^2 dx.$$

Entonces:

$$P_{cr} = EJ \cdot \frac{\int_0^L \bar{y}''^2 dx}{\int_0^L \bar{y}'^2 dx} \quad (3).$$

Ecuación que nos da  $P_{cr}$  y es equivalente a (1).

Observemos que si en la expresión de  $\Delta A_i$ , sustituimos el valor de M por  $M=P \cdot y$  se tiene:

$$\Delta A_i = \int_0^L \frac{\bar{M}^2}{2 \cdot EJ} dx = \int_0^L \frac{P^2 y^2}{2 \cdot EJ} dx,$$

y reemplazando en  $P \cdot \delta = \Delta A_i$ , se tiene:

$$P \cdot \delta = \frac{P^2}{2 \cdot EJ} \int_0^L \bar{y}^2 dx$$

$$\therefore \frac{1}{2} \int_0^L \bar{y}'^2 dx = \frac{1}{2 \cdot EJ} \cdot P \cdot \int_0^L \bar{y}^2 dx$$

$$\text{De donde: } P_{cr} = EJ \cdot \frac{\int_0^L \bar{y}'^2 dx}{\int_0^L \bar{y}^2 dx} \quad (4), \text{ es equivalente a (2).}$$

Como vemos, usando cualquiera de las dos ecuaciones (3) o (4), es necesario para resolver el problema, el conocimiento de la función  $y=y(x)$ . Si esta  $y=y(x)$  se debiera conocer exactamente, no sería útil este método, pues en tal caso se habría ya resuelto el problema por otro método. La realidad es que este método es muy útil por el hecho que, aunque se utilice una función  $y=y(x)$  arbitraria (distinta de  $y$  real), se obtiene un valor de  $P_{cr}$  aproximado. Lógicamente que el error será tanto menor cuanto más se acerque la  $y(x)$  elegida a la  $y$  real.

El valor de  $P_{cr}$  que así se obtiene es siempre aproximado en exceso, y ello es debido a que al suponer una  $y(x)$  arbitraria equivale a suponer que la barra se ha deformado según tal  $y(x)$ , en lugar de la  $y$  real.

Como para obligar a la barra a seguir tal  $y(x)$ , distinta de la que adoptaría espontáneamente, es necesario agregar vínculos oportunamente distribuidos a lo largo de su longitud, estos apoyos aumentan la estabilidad de la barra.

Para elásticas supuestas iguales, es decir para funciones  $y(x)$  arbitrarias igualmente distantes de la real, la expresión:

$$P_{cr} = EJ \cdot \frac{\int_0^L \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx}{\int_0^L y^2 dx} \quad (4),$$

da una aproximación notablemente mayor que la:

$$P_{cr} = EJ \cdot \frac{\int_0^L \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx}{\int_0^L \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx} \quad (3).$$

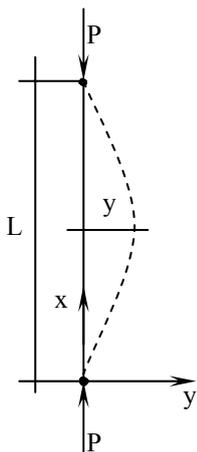
Ello es debido a que la (4) contiene a  $y'$  en lugar de  $y''$ ; y dos funciones poco diferentes entre sí (como la función arbitraria y la real) tienen diferencias porcentuales mayores entre sus diferencias primeras y más aun entre las derivadas segundas.

Por ello, siempre que sea cómodo, es preferible usar la ecuación (4).

En el caso de barras de sección variable, las ecuaciones a utilizar son iguales a la (3) y (4) con la única diferencia que  $J$  debe considerarse dentro de las integrales:

$$(3_1) P_{cr} = E \cdot \frac{\int_0^L J \cdot \bar{y}''^2 dx}{\int_0^L \bar{y}'^2 dx}; \quad (4_1) P_{cr} = E \cdot \frac{\int_0^L \bar{y}'^2 dx}{\int_0^L \bar{y}^2 \frac{1}{J} dx}.$$

La ventaja del método energético respecto del método estático, consiste en el hecho que para obtener resultados satisfactorios, se evita la integración de ecuaciones diferenciales, que algunas veces resulta imposible o muy complicada la solución.



**Ejemplo:** para mostrar la diferencia entre los resultados por aplicación de las ecuaciones (3) y (4).

Supongamos que la  $y$  sea dada por una parábola:

$$y = \frac{4 \cdot f}{L^2} (L \cdot x - x^2)$$

$$y' = \frac{4 \cdot f}{L^2} (L - 2x)$$

$$y'' = -\frac{8 \cdot f}{L^2}$$

Observemos que la ecuación elegida no es la oportuna porque  $y''=cte$  y nosotros sabemos que  $M=P \cdot y$ , es variable.

Calculamos:

$$\int_0^L \bar{y}^2 dx = \frac{16 \cdot f^2}{L^4} \cdot \int_0^L (L^2 x^2 - 2Lx^3 + x^4) dx = \frac{16 \cdot f^2}{L^4} \cdot \left[ \frac{L^2 L^3}{3} - \frac{2L L^4}{4} + \frac{L^5}{5} \right] = \frac{8}{15} f^2 L$$

$$\int_0^L \bar{y}'^2 dx = \frac{16 \cdot f^2}{L^4} \cdot \int_0^L (L^2 - 4xL + 4x^2) dx = \frac{16 \cdot f^2}{L^4} \cdot \left[ L^2 L - \frac{4L^2 L}{2} + \frac{4L^3}{3} \right] = \frac{16}{3} \frac{f^2}{L}$$

$$\int_0^L \bar{y}''^2 dx = \frac{64 \cdot f^2}{L^4} \cdot \int_0^L dx = \frac{64 \cdot f^2}{L^4} L = 64 \frac{f^2}{L^3}.$$

Empleando la ecuación (3) se tiene:

$$P_{cr(3)} = EJ \frac{64 \cdot \frac{f^2}{L^3}}{\frac{16}{3} \cdot \frac{f^2}{L}} = 12 \frac{EJ}{L^2} \text{ (error 21.6\%).}$$

Empleando la ecuación (4) se tiene:

$$P_{cr(4)} = EJ \frac{\frac{16}{3} \cdot \frac{f^2}{L}}{\frac{8}{15} \cdot f^2 L} = 10 \frac{EJ}{L^2} \text{ (error 1.42\%).}$$

Donde vemos que dan en exceso y que la (4) es más aproximada que la (3), ya

que: 
$$P_{cr(\text{real})} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2}, \quad \text{y} \quad \pi^2 \approx 9.86.$$

**Valor riguroso de la carga de pandeo:**

Como vimos, la carga crítica de pandeo solo provoca flechas muy pequeñas ya que las formas de equilibrio que puede determinar son infinitamente próximas a la recta.

Es interesante estudiar el caso en que sean posibles flechas finitas, en dicho caso es necesario hacer uso de la relación diferencial exacta de la elástica:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EJ} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

Sustituyendo en lugar de  $M$  su valor  $P \cdot y$  y haciendo la integración (ya sea por métodos aproximados o exactos) se llega según Schneider al siguiente valor de la flecha en el centro:

$$y_0 = \frac{4}{\sqrt{P}} \cdot \sqrt{\frac{C}{EJ}} \cdot \sqrt{C - \frac{9}{4}C^2 + \frac{31}{8}C^3 - \frac{185}{32}C^4 + \dots}, \text{ siendo } C = \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{P}{EJ}} - 1 = \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} - 1$$

Y que:

$$P = P_{cr} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\pi y_0}{2L} \right)^2 + \frac{19}{32} \cdot \left( \frac{\pi y_0}{2L} \right)^4 + \dots \right].$$

La expresión de  $C$  nos dice que si  $P < P_{cr}$  resulta  $C < 0$  por lo tanto  $y_0$  se hace imaginaria, es decir no existe deformación. La barra se encuentra en equilibrio **estable**.

Si  $P = P_{cr}$  resulta  $C = 0$  y por lo tanto  $y = 0$ .

Si  $P > P_{cr}$  resulta  $C > 0$  y por lo tanto se tienen valores de  $y_0$  reales y positivos.

Vemos entonces que para cada carga  $P > P_{cr}$ , se tiene una flecha, por lo tanto si el material fuese infinitamente elástico y resistente, no se presentaría la inestabilidad del equilibrio.

Los resultados obtenidos por el estudio exacto, difieren de los del estudio aproximado por medio del cual se obtiene la fórmula de Euler. Hasta  $P = P_{cr}^{(E)}$  la forma recta es de equilibrio **estable**. A partir de  $P_{cr}^{(E)}$  comienza la flexión de la pieza, teniéndose para cada  $P > P_{cr}$  una elástica de equilibrio con flecha  $y_0$  determinada; claro está que esto es suponiéndose material infinitamente elástico y resistente. Por lo tanto bajo esta hipótesis no se presenta ni el equilibrio **indiferente** con infinitas elásticas posibles para  $P = P_{cr}^{(E)}$ , ni el equilibrio **inestable** para  $P > P_{cr}^{(E)}$ , que resultan de la teoría aproximada.

Pero los materiales no son infinitamente elásticos y resistentes, y como en virtud de la flexión, la pieza trabaja a flexión compuesta para cargas  $P > P_{cr}^{(E)}$ , pero muy poco diferentes de  $P_{cr}$ , el material queda sujeto a tensiones que sobrepasan la  $\sigma_P$  y entonces ya no son aplicables los resultados de la teoría.

Veamos cuanto es posible sobrepasar la carga  $P_{cr}^{(E)}$  sin peligro para la barra:  
 Cuando  $P > P_{cr}^{(E)}$  se tiene:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{P \cdot y_0}{W}$$

Tratemos de expresar esta ecuación de manera que el análisis sea bien claro. Para ellos ponemos:

$$P = P_{cr}^{(E)} + k \cdot P_{cr}^{(E)},$$

que si la sustituimos en C, resulta:

$$C = \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{P}{EJ}} - 1 = \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{P}{P_{cr} \frac{L^2}{\pi^2}}} - 1 = \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} - 1 = \sqrt{\frac{P_{cr}(1+k)}{P_{cr}}} - 1 = \sqrt{1+k} - 1.$$

Considerando desde ya  $k \ll 1$ , resulta:

$$C \cong 1 + \frac{1}{2}k - 1 \cong \frac{1}{2}k.$$

Sustituyendo este valor de C en la expresión de  $y_0$  se tiene, considerando solo el primer término:

$$y_0 = \frac{4}{\sqrt{\frac{P}{EJ}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}k} = \frac{4}{(C+1) \frac{\pi}{L}} \cdot \sqrt{\frac{k}{2}} = \frac{4L}{\pi \cdot \left(1 + \frac{k}{2}\right)} \cdot \sqrt{\frac{k}{2}} = \frac{4L}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{k/2}{1+k}}$$

$$y_0 = \frac{4}{\sqrt{2} \cdot \pi} L \sqrt{k}$$

Así se tiene:

$$y_0 = 0,9 \cdot L \sqrt{k}.$$

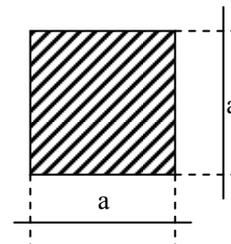
Al obtener este valor de  $y_0$  en forma fácil podemos hacer el estudio.

**Ejemplo:**

Consideremos que la sección de la barra sea cuadrada y de lado  $a=6 \text{ cm}$ , luego:

$$A = 36 \text{ cm}^2, \quad J = \frac{a^4}{12} = 108 \text{ cm}^2,$$

$$i^2 = 3 \Rightarrow i = 1,732, \quad \omega = \frac{108}{3} = 36.$$



**Para L=240 cm.:**

$$S_t = 37; \quad E = 2.100.000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}; \quad \sigma_p = 2.000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$P_{cr}^{(E)} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2} = \frac{9,86 \cdot 2.100.000 \cdot 108}{240 \cdot 240}$$

$$P_{cr}^{(E)} = 38.800 \text{kg}, \quad \sigma_{cr} = \frac{38.800}{36} = 1.080.$$

Consideremos que  $P=1,001 \cdot 38.800=38.839 \text{ Kg}$  (uno por mil).

Es decir:  $k \cdot P_{cr}^{(E)} = 39 \therefore k = 0,001$

$$y_0 = 0,9 \cdot L \sqrt{k} = 0,9 \cdot 240 \sqrt{0,001}$$

$$y_0 = 6,83 \text{cm}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{P \cdot y_0}{W} = \frac{38.839}{36} + \frac{38.839 \cdot 6,83}{36}$$

$$\sigma = 1.080 + 7.370 = 8.450 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

Valor muy por encima de  $\sigma_p$ , por lo tanto la ecuación ya no es cierta.

Considerando que  $P=1,0001 \cdot 38.800=38.804 \text{ Kg}$  (uno por diez mil).

Es decir:  $k = 0,000103$

$$y_0 = 2,19 \text{cm}$$

$$\sigma = 1.080 + \frac{38.804}{36} 2,19 = 3.440 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

También por encima de  $\sigma_p$ , por lo tanto la ecuación no es cierta.

**Para L=270 cm.,** resulta:

$$P_{cr}^{(E)} = 30.700 \text{kg}; \quad \sigma_{cr}^{(E)} = 854 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Considerando  $P=1,0000326 \cdot 30.700=30.701 \text{ Kg}$  (0,3 por diez mil)

Es decir:  $k = 0,0000326$

$$y_0 = 1,38 \text{cm}$$

$$\sigma = 854 + \frac{30.701}{36} 1,38 = 2.024 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

Es decir que aumentando la carga 1 Kg en 30.700 Kg se pasa de 854 Kg/cm<sup>2</sup> a 2.024 Kg/cm<sup>2</sup>.

Como vemos la carga crítica rigurosa difiere en un valor insignificante de la carga crítica de Euler, por lo tanto con suficiente aproximación se puede admitir que el comienzo tenga lugar para la carga de Euler.

Este fenómeno de pandeo es muy peligroso para las estructuras debido a que una pequeña variación en la carga produce una fuerte flexión (gran  $y_0$ ) derrumbándose la estructura sin que aparezca ningún signo exterior que la haga prever.

Al valor de la carga de Euler  $P_{cr}$  se la suele llamar *carga de pandeo ideal*, ya que se supone la existencia de las condiciones ideales antes mencionadas:

1. Eje idealmente recto.
2. Material idealmente homogéneo.
3. Cargas idealmente centradas.

Y se la designa con  $P_{ki}$ .

A la tensión de compresión que la corresponde se la designa *tensión ideal de pandeo*:

$$\sigma_{ki} = \frac{P_{ki}}{A}$$

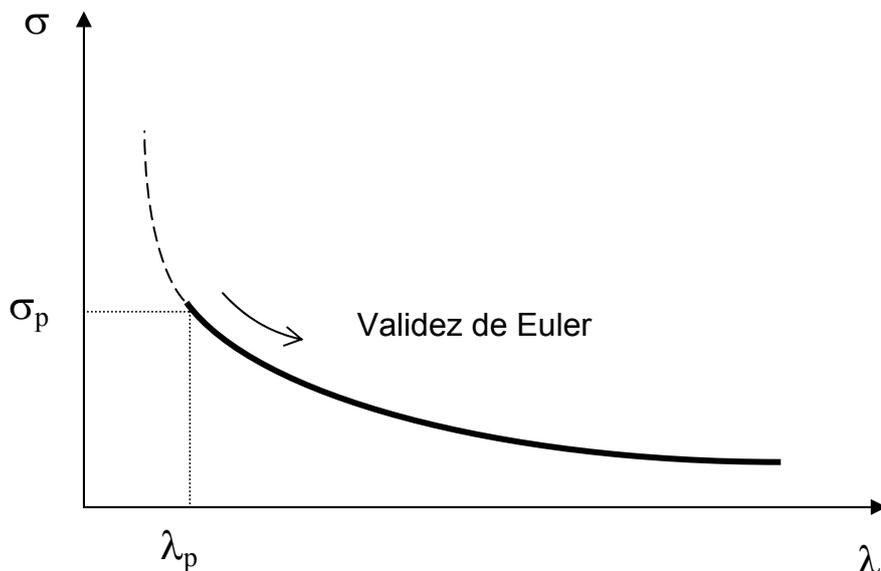
Por lo tanto en la zona elástica, es decir siempre que  $\sigma_{ki} \leq \sigma_P$ , se tendrá:

$$P_{ki} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2} \quad \text{y} \quad \sigma_{ki} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad \text{donde} \quad \lambda^2 = \frac{L^2}{\left(\frac{J}{A}\right)}$$

En lugar del limitar el periodo elástico por medio de las tensiones, se puede hacer por medio de la relación de esbeltez, ya que si  $\sigma_{ki} = \sigma_P$ , se tiene:

$$\lambda_P = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_P}}$$

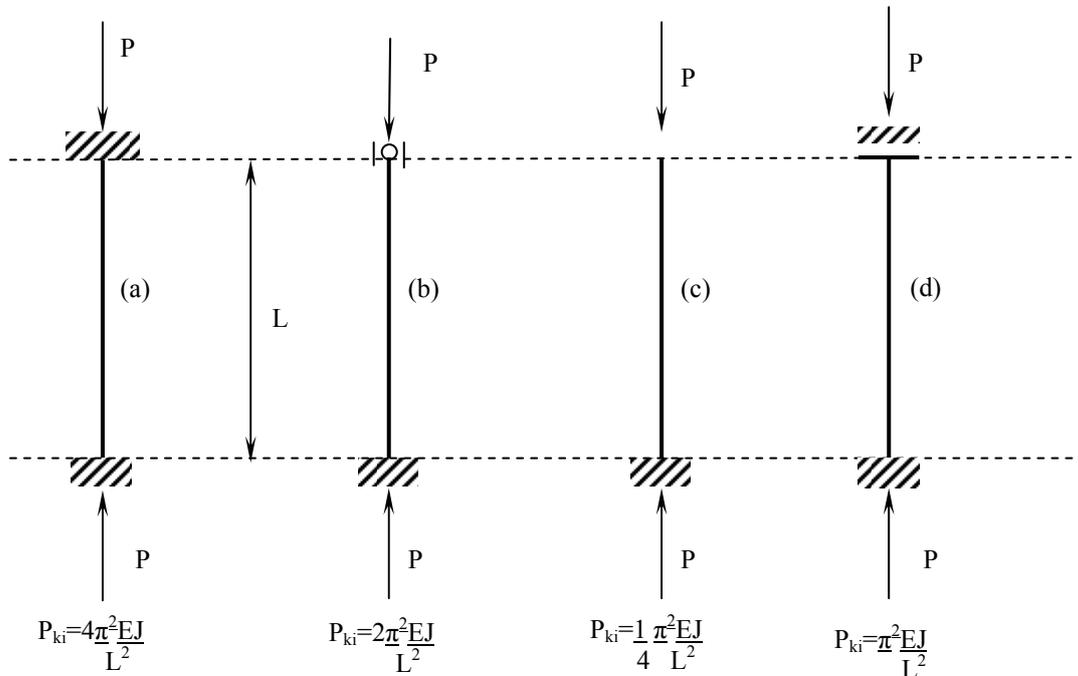
Es decir que las ecuaciones para  $P_{ki}$  y  $\sigma_{ki}$  valen para todo  $\lambda \geq \lambda_P$ .



**Barras con otras condiciones de borde:**

El caso visto de barra comprimida con sus dos extremos articulados es el que más se presenta en la práctica.

Para otras condiciones en sus extremos se puede calcular la carga crítica  $P_E$  (carga de Euler) en forma análoga, obteniéndose:



Se define como *longitud de pandeo* o *longitud ficticia* a la correspondiente a una barra que se encuentra articulada en sus extremos la que para igual sección transversal, posee la misma carga de pandeo que la correspondiente a la de la barra a calcular.

Así para el caso (a) la longitud de pandeo vale:

$$\frac{\pi^2 EJ}{L_k^2} = 4 \frac{\pi^2 EJ}{L^2} \therefore L_k = \frac{L}{2}$$

Para el caso (b):  $L_k = \frac{L}{\sqrt{2}}$

Para el caso (c):  $L_k = 2L$

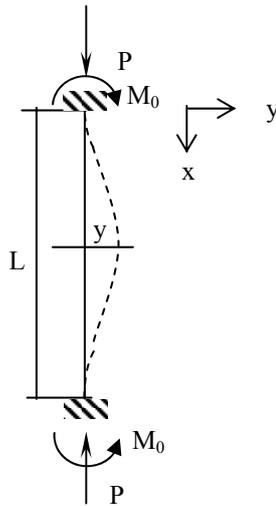
Para el caso (d):  $L_k = L$

Trabajando con estas longitudes de pandeo  $L_k$  se reducen los casos (a), (b) y (c) al caso de la barra articulada en sus dos extremos y por lo tanto se puede trabajar siempre con las fórmulas:

$$P_{ki} = \frac{\pi^2 EJ}{L_k^2} \text{ y } \sigma_{ki} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_k^2}$$

Obtención de la carga crítica para los casos a), b) c) y d)

a)



$$E \cdot J \cdot y'' = -M, \quad M = P \cdot y - M_0$$

$$E \cdot J \cdot y'' = -P \cdot y + M_0$$

$$\therefore E \cdot J \cdot y'' + P \cdot y = M_0, \text{ llamando } \alpha^2 = \frac{P}{EJ}$$

obtenemos la ecuación:

$$y'' + \alpha^2 y = \frac{M_0}{EJ}$$

Ecuación diferencial que debe cumplirse en todos los puntos de la barra.  
La solución de esta ecuación es del tipo:

$$y = A \cdot \text{sen}(\alpha x) + B \cdot \text{cos}(\alpha x) + \frac{M_0}{P}$$

Las condiciones de borde de la barra establecen:

Para:  $x = 0 \rightarrow y = 0 \Rightarrow B + \frac{M_0}{P} = 0 \Rightarrow B = -\frac{M_0}{P}$

$$\therefore y = A \cdot \text{sen}(\alpha x) - \frac{M_0}{P} \cdot \text{cos}(\alpha x) + \frac{M_0}{P}$$

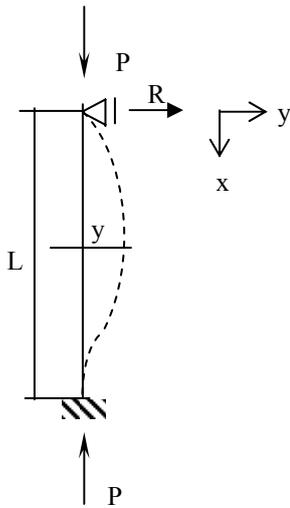
Para:  $x = 0 \rightarrow y' = 0$   
 $\therefore 0 = \alpha A \cdot \text{cos}(\alpha 0) = 0$  , es decir:  $A = 0$

$$\therefore y = -\frac{M_0}{P} \cdot \text{cos}(\alpha x) + \frac{M_0}{P}$$

Para:  $x = L \rightarrow y = 0$   
 $\therefore 0 = \frac{M_0}{P} (1 - \text{cos}(\alpha L))$  , es decir:  $\text{cos}(\alpha L) = 1 \Rightarrow \alpha L = 2\pi$

$$\sqrt{\frac{P}{EJ}} \cdot L = 2\pi, \text{ por lo tanto: } P_{cr} = \frac{4\pi^2}{L^2} EJ$$

b)



$$E \cdot J \cdot y'' = -M, \quad M = P \cdot y - Rx$$

$$E \cdot J \cdot y'' = -P \cdot y + Rx$$

$$\therefore E \cdot J \cdot y'' + P \cdot y = Rx, \text{ llamando } \alpha^2 = \frac{P}{EJ}$$

obtenemos la ecuación:

$$y'' + \alpha^2 y = \frac{Rx}{EJ}$$

La solución de esta ecuación es del tipo:

$$y = A \cdot \text{sen}(\alpha x) + B \cdot \text{cos}(\alpha x) + \frac{Rx}{P}$$

Las condiciones de borde de la barra establecen:

$$x = 0 \rightarrow y = 0 \Rightarrow B = 0$$

Para:  $\therefore y = A \cdot \text{sen}(\alpha x) + \frac{Rx}{P}$

$$x = 0 \rightarrow y' = 0$$

Para:  $\therefore 0 = \alpha A \cdot \text{cos}(\alpha L) + \frac{R}{P} \quad (1)$

$$x = L \rightarrow y = 0$$

Para:  $\therefore 0 = A \text{sen}(\alpha L) + \frac{RL}{P} \quad (2)$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuyo determinante debe ser igual a cero para no tener solución trivial.

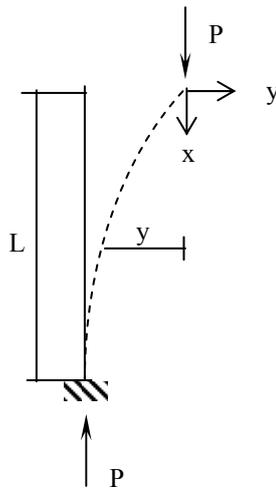
$$\begin{vmatrix} \alpha \text{cos}(\alpha L) & 1/P \\ \text{sen}(\alpha L) & L/P \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{tg}(\alpha L) = \alpha L, \text{ Ecuación que se cumple aproximadamente en}$$

$$\alpha L = \sqrt{2}\pi$$

$$\sqrt{\frac{P}{EJ}} \cdot L = \sqrt{2}\pi, \text{ por lo tanto:}$$

$$P_{cr} = \frac{2\pi^2}{L^2} EJ$$

c)



$$E \cdot J \cdot y'' = -M, \quad M = P \cdot y$$

$$E \cdot J \cdot y'' = -P \cdot y$$

$$\therefore E \cdot J \cdot y'' + P \cdot y = 0, \text{ llamando } \alpha^2 = \frac{P}{EJ}$$

obtenemos la ecuación:

$$y'' + \alpha^2 y = 0$$

La solución de esta ecuación es del tipo:

$$y = A \cdot \text{sen}(\alpha x) + B \cdot \text{cos}(\alpha x)$$

Las condiciones de borde de la barra establecen:

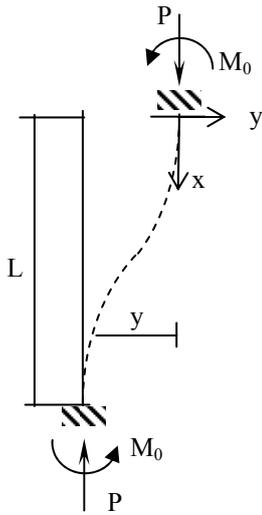
Para:  $x = 0 \rightarrow y = 0 \Rightarrow B = 0$   
 $\therefore y = A \cdot \text{sen}(\alpha x)$

Para:  $x = L \rightarrow y' = 0$   
 $\therefore 0 = \alpha A \cdot \text{cos}(\alpha L) = 0$  ,

Por lo tanto:  $\text{cos}(\alpha L) = 0$  , es decir:  $\alpha L = \frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{\frac{P}{EJ}} \cdot L = \frac{\pi}{2}, \text{ por lo tanto: } P_{cr} = \frac{\pi^2}{4L^2} EJ$$

d)



$$E \cdot J \cdot y'' = -M, \quad M = P \cdot y - M_0$$

$$E \cdot J \cdot y'' = -P \cdot y + M_0$$

$$\therefore E \cdot J \cdot y'' + P \cdot y = M_0, \text{ llamando } \alpha^2 = \frac{P}{EJ}$$

obtenemos la ecuación:

$$y'' + \alpha^2 y = \frac{M_0}{EJ}$$

La solución de esta ecuación es del tipo:

$$y = A \cdot \text{sen}(\alpha x) + B \cdot \text{cos}(\alpha x) + \frac{M_0}{P}$$

Las condiciones de borde de la barra establecen:

Para:  $x = 0 \rightarrow y = 0 \Rightarrow B + \frac{M_0}{P} = 0 \Rightarrow B = -\frac{M_0}{P}$

$$\therefore y = A \cdot \text{sen}(\alpha x) - \frac{M_0}{P} \cdot \text{cos}(\alpha x) + \frac{M_0}{P}$$

Para:  $x = 0 \rightarrow y' = 0$   
 $\therefore 0 = \alpha A \cdot \text{cos}(\alpha 0) = 0$  , es decir:  $A = 0$

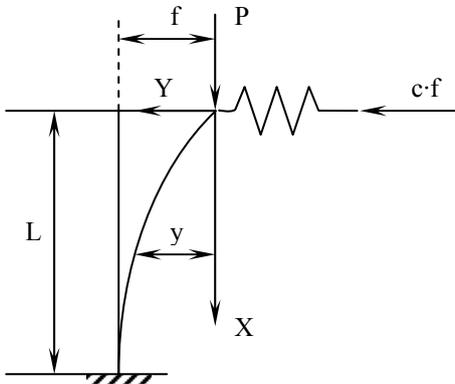
$$\therefore y = -\frac{M_0}{P} \cdot \text{cos}(\alpha x) + \frac{M_0}{P}$$

Para:  $x = L \rightarrow y' = 0$   
 $\therefore 0 = \alpha \frac{M_0}{P} \text{sen}(\alpha L)$  , es decir:  $\text{sen}(\alpha L) = 0 \Rightarrow \alpha L = \pi$

$$\sqrt{\frac{P}{EJ}} \cdot L = \pi, \text{ por lo tanto: } P_{cr} = \frac{\pi^2}{L^2} EJ$$

**Barra empotrada en un extremo y elásticamente apoyada en el otro:**

Suponiendo un apoyo elástico (por ejemplo un resorte) si dicho extremo se desplaza una cantidad  $f$ , aparece una fuerza longitudinal de valor  $c \cdot f$ , si es  $c$  la constante del resorte.



Al cargar la barra con una carga axial de compresión, evidentemente una de las posiciones de equilibrio será la recta, y si la carga  $P$  toma el valor de la carga crítica es posible también una forma curvada de equilibrio, por ejemplo la dibujada en la figura.

La ecuación diferencial aproximada de la elástica será:

$$EJ \cdot y'' = -M = -P \cdot y + c \cdot f \cdot x,$$

es decir:

$$EJ \cdot y'' + P \cdot y = c \cdot f \cdot x.$$

La solución de esta ecuación como es inmediata vale:

$$y = A \cdot \text{sen}(\alpha x) + B \cdot \text{cos}(\alpha x) + \frac{c \cdot f}{P} x,$$

que debe satisfacer las condiciones de borde:

- 1) Para:  $x=0 \rightarrow y=0$ .
- 2) Para:  $x=L \rightarrow y'=0$ .

La (1) da:  $0 = A \cdot \text{sen}(0) + B \cdot \text{cos}(0) + 0 \Rightarrow B = 0$ .

La (2) da:  $0 = \alpha A \cdot \text{cos}(\alpha L) + \frac{c \cdot f}{P}$ ,

De donde:  $A = -\frac{c \cdot f}{P \cdot \alpha} \cdot \frac{1}{\text{cos}(\alpha L)}$ .

La que sustituida en la ecuación de  $y$  y planteando el caso de que para  $x = L$ , debe ser  $y = f$ , se tiene:

$$f = -\frac{c \cdot f}{P \cdot \alpha} \cdot \frac{\text{sen}(\alpha L)}{\text{cos}(\alpha L)} + \frac{c \cdot f}{P} L,$$

que se puede escribir:

$$f \cdot \left[ -1 - \frac{c}{P \cdot \alpha} \text{tg}(\alpha L) + \frac{c \cdot L}{P} \right] = 0, \quad \text{que es la condición de pandeo.}$$

Esta se satisface para  $f = 0$ , es decir la solución trivial, o cuando es nulo el factor entre corchetes.

De esta última condición resulta:

$$\text{tg}(\alpha L) = \alpha \cdot L - \frac{P \cdot \alpha}{c}.$$

Esta ecuación resuelta para cada valor de  $c$  nos permitirá obtener el valor de  $P_{cr}$ . Si  $c = 0$  obtenemos el caso de una barra empotrada en un extremo y libre en el otro, teniéndose que:

$$\operatorname{tg}(\alpha L) = -\infty, \text{ es decir } \alpha L = -\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore P = \frac{\pi^2 EJ}{4L^2}.$$

Si  $c = \infty$ , tenemos el caso de la barra empotrada con el otro extremo articulado fijo:

$$\operatorname{tg}(\alpha L) = \alpha \cdot L, \text{ que resuelta da: } \alpha L = \pi\sqrt{2,04}$$

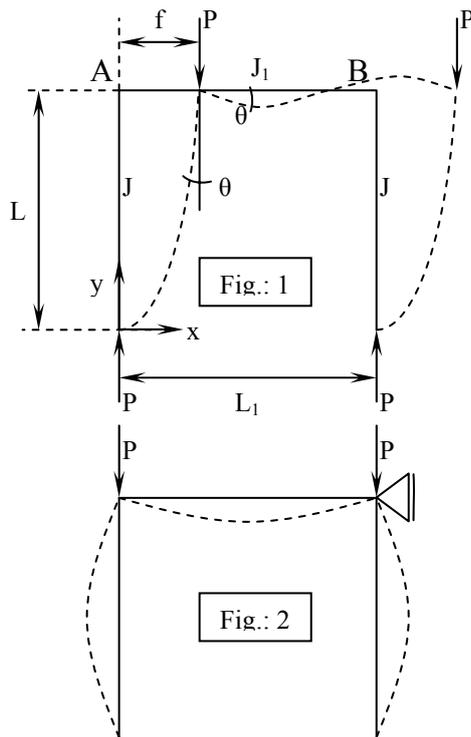
$$\therefore P \cong \frac{2\pi^2 EJ}{L^2}$$

## APLICACIÓN A PÓRTICOS:

### Pórticos con dos articulaciones:

Buscaremos la carga crítica de los parantes del pórtico de la figura, suponiendo como posición de equilibrio la infinitamente próxima indicada en la figura (1). Se considera esta deformación pues, como es fácil de intuir, le corresponderá menos carga crítica que a la otra elástica posible, que es la de figura (2).

Al ser la estructura simétrica, cada parante puede ser considerado como una barra comprimida, libre en un extremo (el inferior) y empotrada elásticamente en el otro (el superior).



La ecuación diferencial es:

$$EJ \cdot y'' + P \cdot y = 0$$

$$\therefore y'' + \alpha^2 y = 0$$

Cuya solución es:

$$y = A \cdot \text{sen}(\alpha x) + B \cdot \text{cos}(\alpha x).$$

Y las condiciones de borde:

$$1. \quad x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$2. \quad x = L \rightarrow y' \approx \theta$$

de (1) resulta  $B = 0$ , luego:

$$y = A \cdot \text{sen}(\alpha x).$$

Para plantear la (2) calculamos la rotación de la tangente al parante, que vale:

$$(y')_{x=L} = A \cdot \alpha \cdot \text{cos}(\alpha L),$$

y la rotación en A del dintel, que resulta una barra sometida a la acción de dos pares  $M = P \cdot f$ . Dicha rotación vale:

$$\theta = \frac{1}{L_1} \left[ \frac{M \cdot L_1}{4EJ_1} \cdot \frac{2}{3} L_1 \right] = \frac{1}{6} \frac{M \cdot L_1}{EJ_1}.$$

Luego la condición (2) da:

$$A \alpha \text{cos}(\alpha L) = \frac{1}{6} \frac{P \cdot f \cdot L_1}{EJ_1}.$$

Y como:  $f = A \cdot \text{sen}(\alpha L)$ ,

pues en  $x = L \Rightarrow y = f = A \cdot \text{sen}(\alpha L)$ .

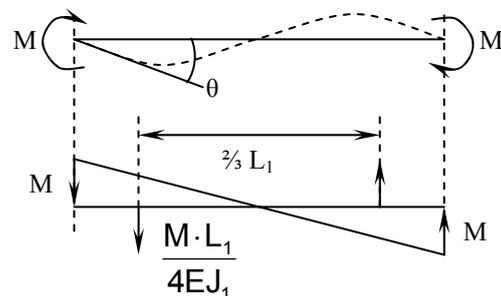
Resulta:

$$\alpha \cdot \text{cos}(\alpha L) = \frac{1}{6} \frac{P}{EJ_1} L_1 \cdot \text{sen}(\alpha L);$$

Es decir:

$$\alpha \cdot \text{cos}(\alpha L) = \frac{P \cdot L_1}{6EJ_1} \text{sen}(\alpha L)$$

$$\Rightarrow \alpha \cdot \text{cos}(\alpha L) = \frac{\alpha^2 EJ \cdot L_1}{6EJ_1} \text{sen}(\alpha L) \quad (*)$$



$\therefore \alpha \cdot L \cdot \operatorname{tg}(\alpha L) = 6 \frac{J_1 \cdot L}{J \cdot L_1}$  ecuación de donde se obtiene  $P_{cr}$  para cada valor de la

relación:  $\frac{J_1 \cdot L}{J \cdot L_1}$ .

Si las barras de la estructura son iguales, resulta:  $\alpha \cdot L \cdot \operatorname{tg}(\alpha L) = 6$ , de donde  $\alpha \cdot L = 1,35$ .

$$\text{Resultando: } P_{cr} = 1,83 \frac{EJ}{L^2} = \frac{1}{5,42} \frac{\pi^2 EJ}{L^2}.$$

En el caso de que el dintel fuese muy rígido en correspondencia con el parante, tendríamos el caso de una barra empotrada y libre en el otro extremo, y tendríamos que:

$EJ_1 = \infty$ , o  $\frac{J_1/L_1}{J/L} = \infty$ , luego de la ecuación (\*) sacamos que debe ser:  $\cos(\alpha L) = 0$ , es

decir:  $\alpha L = \pi/2$ , por lo tanto:

$$P_{cr} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 EJ}{L^2}.$$

Dijimos cuando definimos *longitud de pandeo* que las barras de las estructuras se pueden estudiar como doblemente articuladas siempre que se trabaje con la *longitud de pandeo* de las mismas. Veamos cuanto vale en nuestro caso  $L_k$ . Para ello llamaremos con:

$z^2 = \alpha^2 L^2 = \frac{P}{EJ} L^2$ , siendo  $z = \alpha L$ , que se obtiene de  $\alpha \cdot L \cdot \operatorname{tg}(\alpha L) = 6 \frac{J_1/L}{J/L_1}$  para cada

valor de  $6 \frac{J_1/L}{J/L_1}$ ; luego:  $P_k = z^2 \frac{EJ}{L^2}$ .

Igualamos este valor al que le correspondería en la barra doblemente articulada de longitud  $L_k$ ; así resulta:

$$z^2 \frac{EJ}{L^2} = \pi^2 \frac{EJ}{L_k^2}, \text{ de donde: } L_k = \frac{\pi}{z} L.$$

El estudio numérico de la ecuación:

$\alpha \cdot L \cdot \operatorname{tg}(\alpha L) = 6 \frac{J_1/L}{J/L_1}$ , muestra que la curva  $\frac{\pi}{z} = f \left( \frac{J \cdot L_1}{J_1 \cdot L} \right)$ , coincide

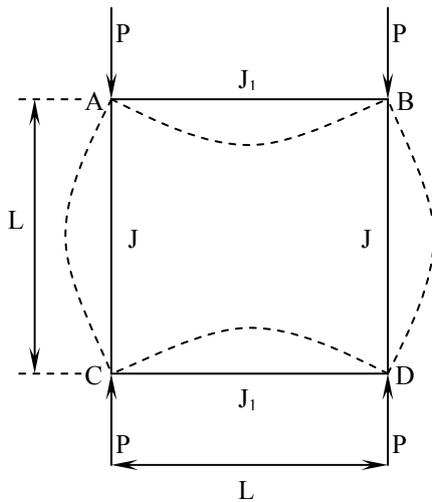
aproximadamente con:

$\frac{\pi}{z} = 2 \sqrt{1 + 0,38 \frac{J \cdot L_1}{J_1 \cdot L}}$ , por lo tanto, sustituyéndola en la expresión de  $L_k$ , se tiene:

$$L_k = 2 \cdot L \sqrt{1 + 0,38 \frac{J \cdot L_1}{J_1 \cdot L}};$$

Fórmula esta que nos permite estudiar rápidamente la carga de pandeo del pórtico basándose en el cálculo de la longitud de pandeo.

**Caso de un marco rectangular:**



Sea el caso de un marco rectangular sometido a la acción de las fuerzas  $P$  que comprimen las parantes  $AC$  y  $BD$ .

Suponiendo que los puntos  $A, B, C$  y  $D$  no pueden desplazarse lateralmente, una de las figuras de pandeo puede ser la planteada. Considerando que la estructura es simétrica, podemos estudiar la barra  $AC$ , la que estará sometida a la fuerza  $P$  y a los pares  $M$  en  $A$  y  $C$  debido a los efectos de los dinteles  $AB$  y  $CD$ .

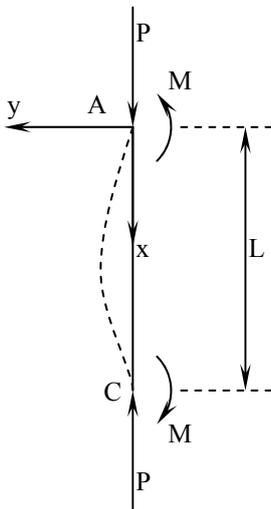
La ecuación será:

$$EJ \cdot y'' = -M_x = -(P \cdot y - M).$$

Luego:

$$y'' + \frac{P}{EJ}y = \frac{M}{EJ}.$$

Y llamando  $\alpha^2 = \frac{P}{EJ}$ , la solución de la ecuación diferencial será:



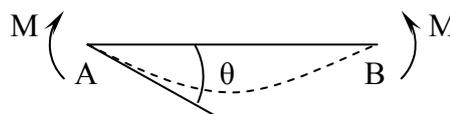
$$y = A \cdot \text{sen}(\alpha x) + B \cdot \text{cos}(\alpha x) + \frac{M}{P},$$

solución general de la ecuación homogénea más solución particular de la ecuación completa.

Las constantes  $A$  y  $B$ , y el momento  $M$  son tres valores incógnitas, que para determinarlos será necesario utilizar las siguientes condiciones de borde:

1. Para  $x = 0$  debe ser  $y = 0$ .
2. Para  $x = L/2$  debe ser  $y' = 0$ .
3. Para  $x = L$  debe ser  $y' = \theta$ .

Siendo  $\theta$  el giro en  $A$  del dintel sometido a dos pares  $M$  en los extremos.



Aplicando la primer condición tenemos:

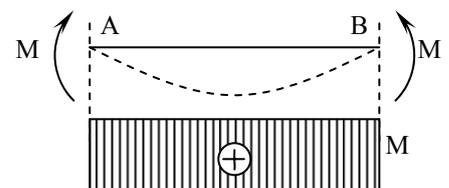
$$0 = A \cdot \text{sen}(0) + B \cdot \text{cos}(0) + \frac{M}{P},$$

de donde:  $B + \frac{M}{P} = 0,$

de la segunda condición, siendo:  $y' = A \cdot \alpha \cdot \text{cos}(\alpha x) - B \cdot \alpha \cdot \text{sen}(\alpha x),$  resulta:

$$0 = A \cdot \alpha \cdot \text{cos}\left(\alpha \frac{L}{2}\right) - B \cdot \alpha \cdot \text{sen}\left(\alpha \frac{L}{2}\right).$$

Para plantear la tercera condición debemos calcular  $\theta$  en  $A$  para el travesaño  $AB$ , que lo calculamos como sigue (por viga conjugada):



$$\theta = \frac{M}{EJ_1} \frac{L_1}{2}.$$

Luego, conocido este valor se tiene la tercera condición:

$$\theta = A \cdot \alpha \cdot \cos(0) = \frac{M}{EJ_1} \frac{L_1}{2}$$

$$\Rightarrow A \cdot \alpha = \frac{M}{EJ_1} \frac{L_1}{2}$$

Es decir que se tiene el siguiente sistema de tres ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot A + 1 \cdot B + \frac{1}{P} M = 0 \\ A \cdot \alpha \cdot \cos\left(\alpha \frac{L}{2}\right) - B \cdot \alpha \cdot \text{sen}\left(\alpha \frac{L}{2}\right) + 0 \cdot M = 0 \\ \alpha \cdot A + 0 \cdot B - \frac{L_1}{2 \cdot EJ_1} M = 0 \end{array} \right.$$

Por ser el sistema homogéneo, la solución trivial da:  $A = B = M = 0$ , es decir que corresponde a la forma inicial de equilibrio **estable** para pequeños valores de  $P$ . Pero para determinar el valor de  $P_{cr}$  es necesario que exista solución para  $A$ ,  $B$  y  $M$ , y para ello la condición indispensable es que se anule el determinante de las incógnitas.

Esta condición es entonces la de pandeo, llamándose al determinante: *determinante de pandeo*:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{P} \\ \alpha & 0 & -\frac{L_1}{2 \cdot EJ_1} \\ \alpha \cos\left(\alpha \frac{L}{2}\right) & \alpha \text{sen}\left(\alpha \frac{L}{2}\right) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando:

$$\frac{L_1}{2 \cdot EJ_1} \alpha \cdot \cos\left(\alpha \frac{L}{2}\right) + \frac{1}{P} \alpha^2 \cdot \text{sen}\left(\alpha \frac{L}{2}\right) = 0,$$

que se puede escribir:

$$\frac{P \cdot L_1}{2 \cdot EJ_1} + \alpha \cdot \text{tg}\left(\alpha \frac{L}{2}\right) = 0 \therefore \frac{EJ \cdot \alpha^2 L_1}{2 \cdot EJ_1} + \alpha \cdot \text{tg}\left(\alpha \frac{L}{2}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2} \alpha \cdot L_1 \frac{J}{J_1} + \text{tg}\left(\alpha \frac{L}{2}\right) = 0 \therefore \frac{1}{2} \alpha \cdot L \frac{L_1 \cdot J}{J_1 \cdot L} + \text{tg}\left(\alpha \frac{L}{2}\right) = 0,$$

o sino:  $\text{tg}\left(\alpha \frac{L}{2}\right) + \alpha \frac{L}{2} \cdot \frac{J \cdot L_1}{J_1 \cdot L} = 0,$

que es la condición de pandeo de la cual se obtendrá un valor de  $P$  para cada valor de  $\frac{J \cdot L_1}{J_1 \cdot L}$ .

En el caso que  $J_1/L_1 \gg J/L$ , es decir que los parantes figuren empotrados en sus extremos, se tiene la condición de pandeo reducida a:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha \frac{L}{2}\right) = 0.$$

La que se cumple para  $\alpha \frac{L}{2} = \pi$ , de donde:

$$P_{cr} = 4 \frac{\pi^2 EJ}{L^2}.$$

Valor que coincide con el ya visto para la barra doblemente empotrada.

En el caso inverso:  $J_1/L_1 \ll J/L$ , es decir que los extremos de los parantes quedan articulados, se tiene:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha \frac{L}{2}\right) = -\infty.$$

La que se cumple para  $\alpha \frac{L}{2} = -\frac{\pi}{2}$ , de donde:

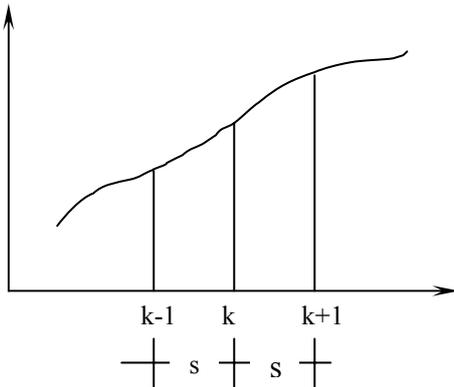
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2}.$$

Valor que coincide con el obtenido para la barra con extremos articulados.

En este caso entonces se ve que la carga crítica para el parante de un marco estará comprendido entre  $\frac{\pi^2 EJ}{L^2}$  y  $4 \frac{\pi^2 EJ}{L^2}$ , y por lo tanto la *longitud de pandeo*  $L_k$  valdrá:

$$\frac{L}{2} \leq L_k \leq L$$

**PANDEO POR DIFERENCIAS FINITAS**



Aparte de integrar la ecuación diferencial de la elástica directamente, o aplicar el método energético para resolver columnas sometidas a compresión, se puede usar *diferencias finitas*.

Recordemos que si tenemos una cierta curva  $y = f(x)$ , los valores de las derivadas en un punto están dados por:

$$y'_k = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2 \cdot s}$$

$$y''_k = \frac{y_{k+1} - 2 \cdot y_k + y_{k-1}}{s^2}$$

Vamos a aplicarla al caso de una barra doblemente articulada, cuya ecuación diferencial vimos que será:

$$y'' + \frac{P}{EJ} y = 0.$$

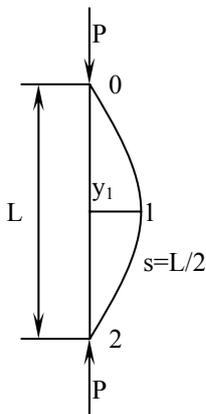
O sea:  $y'' + \alpha^2 y = 0$ , con  $\alpha^2 = \frac{P}{EJ}$ .

Expresando esta ecuación en *diferencias finitas* resulta:

$$\frac{y_{k+1} - 2 \cdot y_k + y_{k-1}}{s^2} + \alpha^2 y_k = 0.$$

O sea:  $y_{k+1} - 2 \cdot y_k + y_{k-1} + \alpha^2 s^2 y_k = 0$

$$y_{k-1} + y_k (\alpha^2 s^2 - 2) + y_{k+1} = 0 \quad (1).$$



**Ejemplo:** sea una barra doblemente articulada de sección constante. Como primera aproximación dividimos a la estructura en dos partes. Suponemos además una deformación muy pequeña.

En esta condición, resulta:

Aplicando la ecuación (1) al punto central resulta:

$$y_0 + y_1 \left( \alpha^2 \frac{L^2}{4} - 2 \right) + y_2 = 0,$$

pero  $y_0 = y_2 = 0$ ,

$$\Rightarrow y_1 \left( \alpha^2 \frac{L^2}{4} - 2 \right) = 0.$$

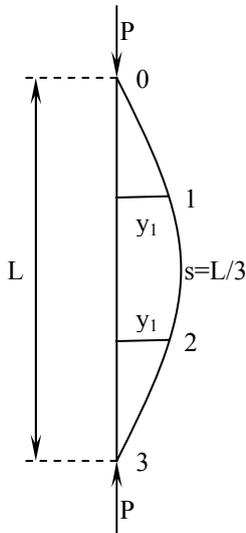
Como  $y_1 \neq 0$ , entonces se anula el paréntesis:

$$\alpha^2 \frac{L^2}{4} - 2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{8}{L^2}$$

$$\therefore P_{cr} = 8 \frac{EJ}{L^2}.$$

Siendo el valor exacto  $P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2} = 9,87 \frac{EJ}{L^2}$ , resulta un error del 19%.

Supongamos ahora que tomamos dos puntos intermedios, es decir que  $s = L/3$ ; entonces resulta:



En el punto (1) la ecuación es:

$$y_0 + y_1 \left( \alpha^2 \frac{L^2}{9} - 2 \right) + y_2 = 0$$

con  $y_0 = 0$ , y además  $y_1 = y_2$ , entonces:

$$y_1 \left( \alpha^2 \frac{L^2}{9} - 1 \right) = 0.$$

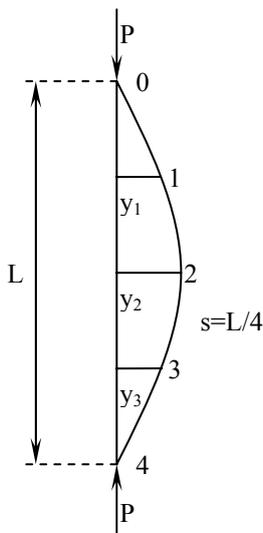
Como  $y_1 \neq 0$  entonces:

$$\alpha^2 \frac{L^2}{9} - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{9}{L^2}.$$

Por lo tanto resulta:

$$P_{cr} = 9 \frac{EJ}{L^2}, \text{ de donde se tiene un error del 9\%}.$$

Si tomamos tres puntos intermedios, el ancho del intervalo sería  $s = L/4$  y el sistema de ecuaciones a plantear, el siguiente:



En el punto (1) tenemos:

$$y_0 + y_1 (\alpha^2 s^2 - 2) + y_2 = 0.$$

En el punto (2) tenemos:

$$y_1 + y_2 (\alpha^2 s^2 - 2) + y_3 = 0.$$

Como  $y_0 = 0$  y además  $y_1 = y_3$ , resulta:

$$\begin{cases} y_1 (\alpha^2 s^2 - 2) + y_2 = 0 \\ y_1 \cdot 2 + y_2 (\alpha^2 s^2 - 2) = 0 \end{cases}$$

Para que la solución sea distinta de la trivial, debe ser:

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 s^2 - 2 & 1 \\ 2 & \alpha^2 s^2 - 2 \end{vmatrix} = 0 = (\alpha^2 s^2 - 2)^2 - 2 = 0$$

Es decir:

$$\alpha^4 s^4 - 4 \cdot \alpha^2 s^2 + 4 - 2 = 0$$

$$\therefore \alpha^4 - 4 \frac{\alpha^2}{s^2} + 2 \frac{1}{s^4} = 0$$

De donde:

$$\alpha^2 = \frac{\frac{4}{s^2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{s^2}\right)^2 - \frac{8}{s^4}}}{2} = \frac{1}{2} \frac{4}{s^2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2}} \right)$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{2}{s^2} (1 \pm 0,70711)$$

La condición más desfavorable es con el signo negativo:

$$\alpha^2 = \frac{2}{s^2} \cdot 0,29289$$

$$\alpha^2 = 0,586 \frac{16}{L^2} = \frac{9,37}{L^2}$$

$$\therefore P_{cr} = 9,37 \frac{EJ}{L^2} \text{ que tiene un error de 5\%}$$

Si dividimos en  $k$  partes iguales, se plantearía un determinante (*determinante de pandeo*) de la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} (\alpha^2 s^2 - 2) & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & (\alpha^2 s^2 - 2) & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & (\alpha^2 s^2 - 2) & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & (\alpha^2 s^2 - 2) \end{vmatrix} = 0$$

Del cual, desarrollando la raíz positiva menor de  $\alpha$  permite obtener  $P_{cr}$ .

**Extrapolación de Richardson:**

Se ha demostrado que cuando se plantea una ecuación diferencial de segundo orden en diferencias finitas, el error que se obtiene es proporcional al cuadrado del ancho de la malla. Por eso si para un ancho de malla  $S_1$ , el error es  $e_1$ , para un ancho  $S_2$  será:

$$S_1^2 \_ e_1$$

$$S_2^2 \_ e_2 = \frac{S_2^2}{S_1^2} e_1$$

Y como:  $S_1 = \frac{L}{n_1}$  y  $S_2 = \frac{L}{n_2}$ .

Resulta:  $e_2 = \frac{L^2/n_2^2}{L^2/n_1^2} e_1 = \frac{n_1^2}{n_2^2} e_1$ .

Pero para:  $n_1 \rightarrow y = y_1 + e_1$ , solución real.

Y para:  $n_2 \rightarrow y = y_2 + e_2 = y_2 + \frac{n_1^2}{n_2^2} e_1$ .

De donde:  $y = y_2 + \frac{n_1^2}{n_2^2} (y - y_1) = y_2 + \frac{n_1^2}{n_2^2} y - \frac{n_1^2}{n_2^2} y_1$ .

Luego:  $y \left( 1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \right) = \frac{y_2 n_2^2 - y_1 n_1^2}{n_2^2}$

$$y(n_2^2 - n_1^2) = y_2 n_2^2 - y_1 n_1^2$$

Y queda finalmente que:  $y = \frac{y_2 n_2^2 - y_1 n_1^2}{n_2^2 - n_1^2}$

Es decir que conociendo la solución por *diferencias finitas* para dos anchos de malla, podemos extrapolar un valor de  $y$  más exacto. En este caso  $y$  representa el coeficiente de la carga crítica, cuyo valor exacto que es  $\pi^2$ .

Aplicándolo a la primera y segunda aproximación, tenemos:

Para  $n_1=2 \rightarrow y_1=8$ .  
 Para  $n_2=3 \rightarrow y_2=9$ .

$$\therefore y = \frac{y_2 n_2^2 - y_1 n_1^2}{n_2^2 - n_1^2} = \frac{9 \cdot 9 - 8 \cdot 4}{9 - 4} = \frac{81 - 32}{5} = \frac{49}{5} = 9,8 \text{ (error 0,78\%)}$$

Aplicándolo ahora a la segunda y tercera, resulta:

Para  $n_1=3 \rightarrow y_1=9$ .  
 Para  $n_2=4 \rightarrow y_2=9,37$ .

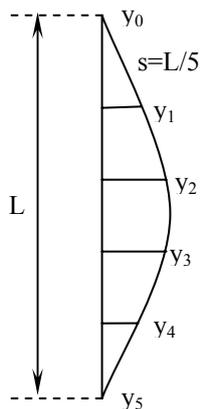
$$y = \frac{9,37 \cdot 16 - 9 \cdot 9}{16 - 9} = \frac{149,92 - 81}{7} = \frac{68,92}{7} = 9,846 \text{ (error 0,24\%)}$$

### Solución por recurrencia:

Para el caso de usar una malla muy densa el proceso de resolver el determinante de pandeo es muy engorroso. Esto se puede evitar por medio del método de *recurrencia*, es decir encontrar la carga crítica mediante aproximaciones sucesivas.

De la *ecuación general en diferencias finitas* sacamos:

$$y_{k+1} = y_k (2 - \alpha^2 s^2) - y_{k-1}$$



Que es la fórmula de recurrencia que permite formar un sistema de ecuaciones lineales y homogéneas, y por medio de tanteos determinar el valor de  $\alpha$ .

Así, si consideramos  $J=cte$  y  $n=s$ , se tiene:

$$y_2 = y_1 \left( 2 - \frac{\alpha^2 L^2}{2 \cdot s} \right) - y_0 \quad \text{con } y_0 = 0$$

$$y_3 = y_2 \left( 2 - \frac{\alpha^2 L^2}{2 \cdot s} \right) - y_1 = y_1 \left[ \left( 2 - \frac{\alpha^2 L^2}{2 \cdot s} \right)^2 - 1 \right]$$

$$y_4 = y_3 \left( 2 - \frac{\alpha^2 L^2}{2 \cdot s} \right) - y_2 = y_1 \left( 2 - \frac{\alpha^2 L^2}{2 \cdot s} \right) \cdot \left[ \left( 2 - \frac{\alpha^2 L^2}{2 \cdot s} \right)^2 - 2 \right]$$

$$y_5 = y_4 \left( 2 - \frac{\alpha^2 L^2}{2 \cdot s} \right) - y_3 = y_1 \left( 2 - \frac{\alpha^2 L^2}{2 \cdot s} \right)^2 \left[ \left( 2 - \frac{\alpha^2 L^2}{2 \cdot s} \right)^2 - 2 \right] - y_1 \left[ \left( 2 - \frac{\alpha^2 L^2}{2 \cdot s} \right)^2 - 1 \right]$$

Si en la última ecuación sustituimos el valor de  $\alpha^2$  correcto debe anularse, pues ella no es función de  $y_1$ . Es decir que la última ecuación nos da una forma de resolver el problema, pero se plantea una ecuación de cuarto grado en  $\alpha^2$  lo que dificulta la solución.

Ahora bien, dado que el valor de  $y_1$  no influye sobre el valor de  $\alpha^2$ , podemos proceder así:

1. Se toma un valor arbitrario para  $y_1$ , que sea mayor que cero. Por ejemplo  $y_1=1$ .
2. Se adopta un valor para  $\alpha^2$  y se reemplaza en las ecuaciones de  $y_2, \dots, y_5$ . Si  $y_5 \neq 0$  se corrige el  $\alpha^2$  adoptado, y así siguiendo hasta hallar el  $\alpha^2$  correcto.

Por ejemplo, tomando  $\alpha^2 = 9/L^2$ :

$$y_2 = 1 \cdot (2 - 9/25) = 1,64$$

$$y_3 = 1,64 \cdot 1,64 - 1 = 1,6896$$

$$y_4 = 1,6896 \cdot 1,64 - 1,64 = 1,1309$$

$$y_5 = 1,1319 \cdot 1,64 - 1,69 = 0,165.$$

Tomemos ahora el valor  $\alpha^2 = 10/L^2$ :

$$y_2 = 1 \cdot (2 - 10/25) = 1,60$$

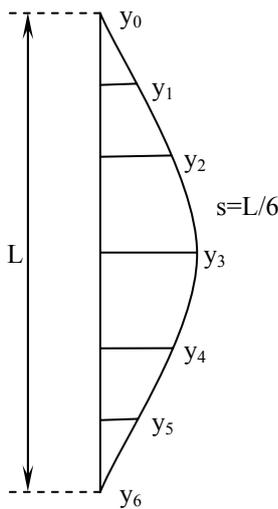
$$y_3 = 1,6 \cdot 1,6 - 1 = 1,56$$

$$y_4 = 1,56 \cdot 1,6 - 1,6 = 0,897$$

$$y_5 = 0,897 \cdot 1,6 - 1,56 = -0,1264.$$

Interpolando resulta  $\alpha^2 = 9,57/L^2$ .

Otra forma de proceder es la siguiente:



$$\alpha^2 = \frac{9}{L^2}, \quad \left(2 - \frac{\alpha^2 L^2}{36}\right) = 1,75.$$

$$y_2 = 1,75$$

$$y_3 = 1,75 \cdot 1,75 - 1 = 2,06$$

$$y_4 = 2,06 \cdot 1,75 - 1,75 = 1,855$$

No es necesario seguir, pues debería ser  $y_2 = y_4$ , por lo tanto  $\Delta y = 0,105$ .

Adoptando  $\alpha^2 = 10/L^2$ :

$$y_2 = \left(2 - \frac{\alpha^2 L^2}{36}\right) = 1,723$$

$$y_3 = 1,723 \cdot 1,723 - 1 = 1,97$$

por lo tanto  $\Delta y = -0,053$ .

$$y_4 = 1,97 \cdot 1,723 - 1,723 = 1,67$$

Adoptando  $\alpha^2 = 9,5/L^2$  resulta:

$$y_2 = \left(2 - \frac{\alpha^2 L^2}{36}\right) = 1,736$$

$$y_3 = 1,736 \cdot 1,736 - 1 = 2,105 \quad \text{por lo tanto } \Delta y = 0,026.$$

$$y_4 = 2,105 \cdot 1,736 - 1,736 = 1,762$$

Adoptando  $\alpha^2 = 9,8/L^2$  tendremos:

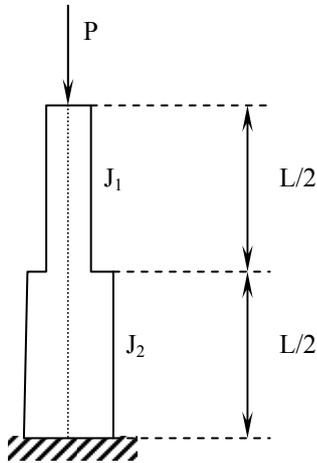
$$y_2 = \left(2 - \frac{9,8}{36}\right) = 1,728$$

$$y_3 = 1,728 \cdot 1,728 - 1 = 1,985 \quad \text{por lo tanto } \Delta y = -0,028.$$

$$y_4 = 1,985 \cdot 1,728 - 1,728 = 1,700$$

Así siguiendo se puede establecer el valor de  $\alpha$  correcto para el ancho de malla adoptado.

**Aplicación a  $J$  variable:**



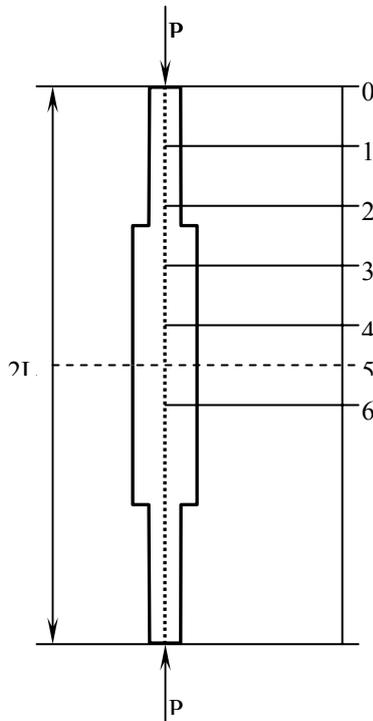
Supongamos la siguiente columna sometida a una fuerza de compresión  $P$ . Esta se podría resolver como si fuese una viga doblemente articulada y de longitud doble.

Entonces podemos plantear la solución por *recurrencia* de la siguiente forma; siendo  $y_4=y_6$  la condición que me permite calcular el  $P_{cr}$ . Recordemos que la expresión genérica era:

$$y_{k+1} = y_k (2 - \alpha^2 s^2) - y_{k-1}.$$

Tendremos en este caso dos valores de  $\alpha^2$ , es decir:

$$\alpha_1^2 = \frac{P}{EJ_1} \text{ y } \alpha_2^2 = \frac{P}{EJ_2} = \frac{P}{EJ_2} \frac{J_1}{J_1} = \alpha_1^2 \frac{J_1}{J_2}.$$



Planteamos la solución por recurrencia:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 (2 - s^2 \alpha_1^2) - y_0 \\ y_3 &= y_2 (2 - s^2 \alpha_1^2) - y_1 \\ y_4 &= y_3 (2 - s^2 \alpha_2^2) - y_2 \\ y_5 &= y_4 (2 - s^2 \alpha_2^2) - y_3 \\ y_6 &= y_5 (2 - s^2 \alpha_2^2) - y_4 \end{aligned}$$

Haciendo  $y_1 = 1$  y como  $y_0 = 0$ , adoptando un valor de  $\alpha_1$ , reemplazamos en el sistema de ecuaciones anterior y verificamos si  $y_4 = y_6$ ; si no se verifica, tomamos otro y así sucesivamente hasta que  $y_4 = y_6$ .

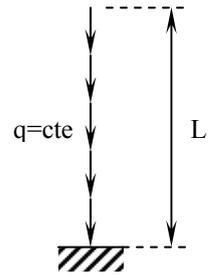
**PANDEO DE BARRAS CON CARGA DISTRIBUIDA**

Supongamos la siguiente barra, empotrada-libre, sometida a una carga distribuida  $q=cte$ , y de longitud  $L$ .

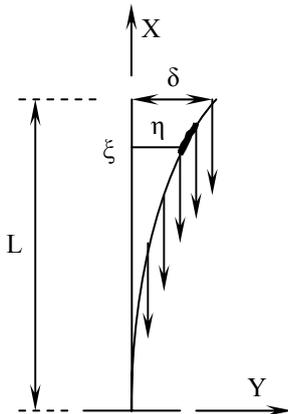
Cuando la carga era puntual, vimos que:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{4 \cdot L^2}.$$

La solución del problema de carga distribuida la hacemos mediante el empleo del método energético.



Consideremos la siguiente deformada:



Sabemos que se debe cumplir la condición de equilibrio **indiferente**, por lo tanto debe ser:

$$\Delta T = \Delta U.$$

Siendo  $\Delta T$  el trabajo de las fuerzas exteriores y  $\Delta U$  el trabajo interno de deformación.

Vamos a plantear cada uno de estos términos.

Supongamos que la deformada de la viga con carga distribuida, es igual a la de la viga con carga concentrada:

$$y = \delta \cdot \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi X}{2L}\right) \right] \quad (1).$$

Calculamos el momento flector en una sección  $x$ :

$$M_x = \int_x^L q \cdot d\xi(\eta - y) = \int_x^L q \cdot \left[ \delta \cdot \left( 1 - \cos\left(\frac{\pi \xi}{2L}\right) \right) - \delta \cdot \left( 1 - \cos\left(\frac{\pi X}{2L}\right) \right) \right] \cdot d\xi$$

$$M_x = q \cdot \delta \cdot \int_x^L \left[ \cos\left(\frac{\pi X}{2L}\right) - \cos\left(\frac{\pi \xi}{2L}\right) \right] \cdot d\xi$$

$$M_x = q \cdot \delta \cdot \left\{ \left[ \cos\left(\frac{\pi X}{2L}\right) \right] \cdot (L - x) - \left[ \frac{2L}{\pi} \text{sen}\left(\frac{\pi \xi}{2L}\right) \right]_x^L \right\}$$

$$M_x = q \cdot \delta \cdot \left\{ \left[ \cos\left(\frac{\pi X}{2L}\right) \right] \cdot (L - x) - \frac{2L}{\pi} + \frac{2L}{\pi} \text{sen}\left(\frac{\pi X}{2L}\right) \right\}$$

$$\text{Pero } \Delta U = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \frac{M_x^2}{EJ} dx = \frac{1}{2} \frac{q^2 \delta^2}{EJ} \cdot \int_0^L \left\{ \left[ \cos\left(\frac{\pi X}{2L}\right) \right] \cdot (L - x) - \frac{2L}{\pi} + \frac{2L}{\pi} \text{sen}\left(\frac{\pi X}{2L}\right) \right\}^2 dx,$$

que una vez integrada da:

$$\Delta U = \frac{1}{2} \frac{q^2 \delta^2}{EJ} \left[ \frac{1}{6} + \frac{9}{\pi^2} - \frac{32}{\pi^3} \right] \cdot L^3.$$

Vamos a determinar ahora  $\Delta T$ :

$$\Delta T = \frac{P}{2} \cdot \int_0^L \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx = P \cdot \lambda \quad (\text{Para el caso de carga puntual}).$$

En nuestro caso es:

$$\Delta T = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L q \cdot (L - x) \cdot \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L q \cdot (L - x) \cdot \left[ \frac{\delta \cdot \pi}{2L} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{2L} \right) \right]^2 dx$$

Operando llegamos a la expresión:

$$\Delta T = \frac{q \cdot \pi^2 \delta^2}{8L^2} \cdot \left[ \int_0^L L \cdot \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\pi x}{2L} \right) \cdot dx - \int_0^L x \cdot \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\pi x}{2L} \right) \cdot dx \right].$$

Resolviendo esta integral se obtiene:

$$\Delta T = \frac{q \cdot \pi^2 \delta^2}{8} \cdot \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right).$$

Planteando la igualdad de energía, resulta:

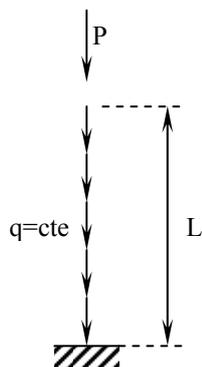
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{q^2 \delta^2}{EJ} \cdot \left[ \frac{1}{6} + \frac{9}{\pi^2} - \frac{32}{\pi^3} \right] \cdot L^3 = q \cdot \delta^2 \frac{\pi^2}{8} \cdot \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right)$$

$$\therefore (qL)_{cr} = 7,89 \frac{EJ}{L^2}$$

Comparando la carga distribuida con la concentrada:

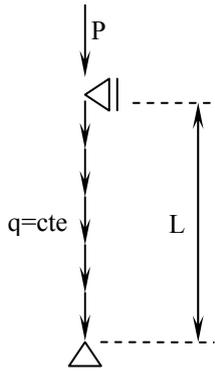
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{4L^2} \cong \frac{2,46 \cdot EJ}{L^2} \quad \text{y} \quad (qL)_{cr} = \frac{7,89 \cdot EJ}{L^2}.$$

Vemos que la cargada en forma distribuida resiste tres veces más carga que la concentrada, por lo tanto se puede representar una carga distribuida como una carga concentrada de valor  $\frac{1}{3}$  de la carga distribuida.



En el caso de una *combinación de carga*:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{4L^2} - 0,3 \cdot (qL).$$



Para el caso de *articulada – articulada*:

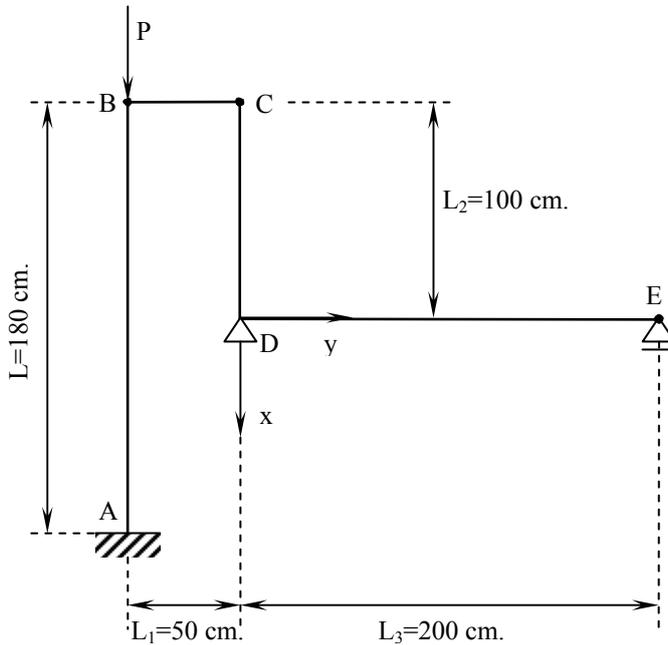
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2} \text{ Para } q=0 \text{ y } p \neq 0.$$

$$P_{cr} = \frac{18,6 \cdot EJ}{L^2} = (qL)_{cr} \text{ Para } q \neq 0 \text{ y } p=0.$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2} - 0,5 \cdot qL \text{ Para } q \neq 0 \text{ y } p \neq 0.$$

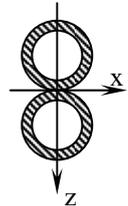
**PROBLEMA**

Determinar la carga máxima de la siguiente estructura tal que en ningún punto de la misma se sobrepase el  $\sigma_{ad}=1400 \text{ Kg/cm}^2$ , siendo  $\sigma_p=2000 \text{ Kg/cm}^2$  y  $\sigma_f=2200 \text{ Kg/cm}^2$ :



Datos:

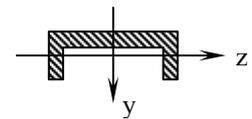
Barra AB:  
 $D_e=4,0 \text{ cm.}$   
 $D_i=3,2 \text{ cm.}$   
 $J_z=7,42 \text{ cm}^4 \text{ c/u.}$   
 $A=4,53 \text{ cm}^2 \text{ c/u.}$



Barra BC:  
 $D=2 \text{ cm.}$   
 $A=\pi \text{ cm}^2$   
 $J=\pi/4 \text{ cm}^4$



Barra CDE:  
 DIN N° 18.  
 $A=28 \text{ cm}^2$   
 $J_y=1350 \text{ cm}^4$   
 $J_z=114 \text{ cm}^4$



Para todas las barras:  $E=2,1 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ .

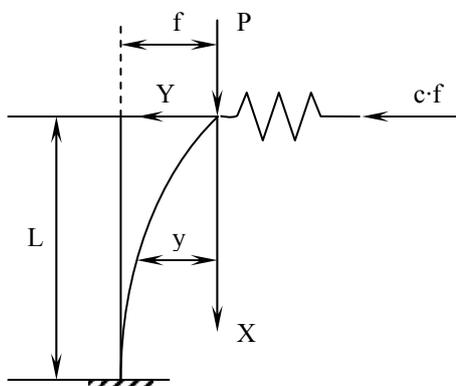
**Resolución:**

Resolver esta estructura es resolver el caso que se observa en la figura.

Donde la estructura BC y CDE es reemplazada por el resorte de constante c. Por lo tanto debemos hallar la constante c de dicha estructura.

Para ello suponemos que actúa una carga  $P_1$  desconocida:

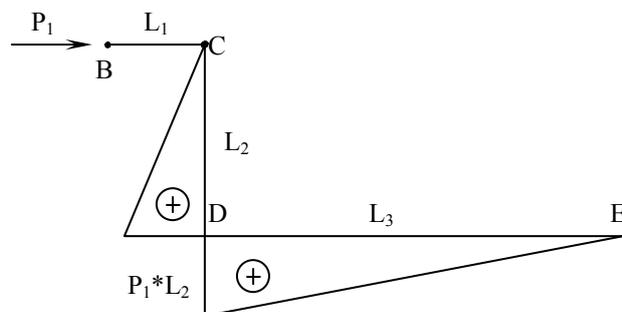
El diagrama de momentos será:



El desplazamiento total del punto B será:

$$\delta_B = \delta_B^{BC} + \delta_C^{CDE}$$

Donde  $\delta_B^{BC}$  es el acortamiento de la barra BC por compresión; y  $\delta_C^{CDE}$  es el desplazamiento del punto C por acción de la carga  $P_1$ .



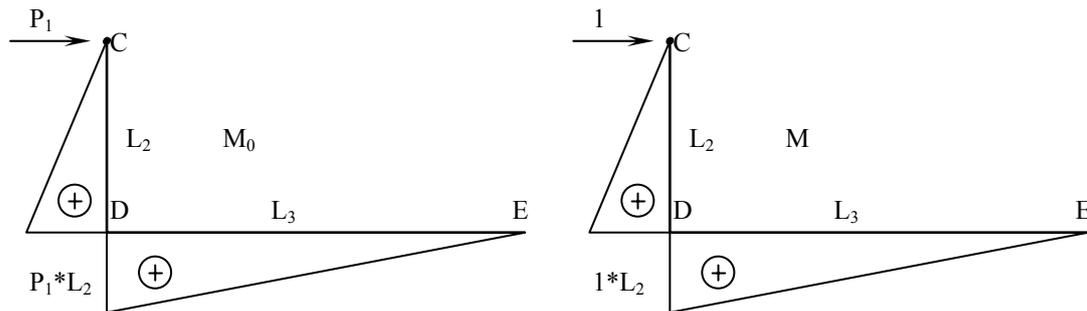
Cálculo de  $\delta_B^{BC}$ :

Por la ley de Hooke será:

$$\delta_B^{BC} = \frac{P_1 \cdot L_1}{A_{BC} \cdot E} = \frac{P_1 \cdot 50}{\pi \cdot 2,1 \times 10^6} = 0,0000076 \cdot P_1 [\text{cm}]$$

Cálculo de  $\delta_C^{CDE}$ :

Aplicando el teorema de Castigliano tenemos:



$$\begin{aligned} J \cdot \delta_C^{CDE} &= \int_C^D \left[ \text{trapezoid} \right] dx + \int_D^E \left[ \text{triangle} \right] dx \\ &= \frac{1}{3} (P_1 \cdot L_2 \cdot \bar{1} \cdot L_2 \cdot L_2) + \frac{1}{3} (P_1 \cdot L_2 \cdot \bar{1} \cdot L_2 \cdot L_3) \\ &= \frac{1}{3} (P_1 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100) + \frac{1}{3} (P_1 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 200) = \frac{1}{3} P_1 (1000000 + 2000000) \\ &= 1000000 \cdot P_1 \end{aligned}$$

$$\therefore \delta_C^{CDE} = \frac{1000000 \cdot P_1}{EJ} = \frac{1000000 \cdot P_1}{114 \cdot 2100000} = 0,00418 \cdot P_1.$$

Cálculo de  $\delta_B$ :

$$\begin{aligned} \delta_B &= \delta_B^{BC} + \delta_C^{CDE} \\ \delta_B &= (0,0000076 + 0,00418) \cdot P_1 \\ \delta_B &= 0,0041876 \cdot P_1 \end{aligned}$$

Cálculo de c:

Como sabemos que  $P_1 = c \cdot \delta_B$ , reemplazando el valor de  $\delta_B$  en la anterior, resulta (c es el valor de  $P_1$  para  $\delta_B=1$ ):

$$\delta_B = 0,0041876 \cdot P_1 = 1 \Rightarrow c = P_1$$

$$\therefore c = \frac{1}{0,0041876} = 238,8 \text{ Kg/cm}$$

$c = 238,8 \text{ Kg/cm}$

Cálculo de la carga crítica  $P_{cr}$ :

Aplicando la ecuación

$$\operatorname{tg}(\alpha L) = \alpha L - \frac{P\alpha}{c}$$

podemos hallar  $P_{cr}$ , ya que  $\alpha^2 = \frac{P}{EJ}$  y conocemos el valor de  $c$ .

Esta ecuación la resolvemos por tanteo:

$$\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{P}{EJ}} \cdot 200\right) = \sqrt{\frac{P}{EJ}} \cdot 200 - \frac{P \cdot \sqrt{\frac{P}{EJ}}}{238,8}$$

$$\operatorname{tg}\left(\sqrt{P} \cdot \frac{200}{\sqrt{2,1 \times 10^6 \cdot 14,84}}\right) = \sqrt{P} \cdot \frac{200}{\sqrt{2,1 \times 10^6 \cdot 14,84}} - P\sqrt{P} \cdot \frac{1}{238,8\sqrt{2,1 \times 10^6 \cdot 14,84}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{P}}{28}\right) = \frac{\sqrt{P}}{28} - \frac{P\sqrt{P}}{133000}$$

**I) Supongamos  $P_{cr}=2000$  Kg.**

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{2000}}{28}\right) = \frac{\sqrt{2000}}{28} - \frac{2000 \cdot \sqrt{2000}}{133000}, \text{ pasando todo de radianes a grados}$$

obtenemos:

$$\operatorname{tg}(205^\circ) = \operatorname{tg}(205^\circ - 180^\circ) = \operatorname{tg}(25^\circ) = 0,466$$

$$\therefore 0,466 \neq 2,81.$$

**II) Supongamos  $P_{cr}=15000$  Kg.**

$$\operatorname{tg}\left(\frac{122}{28}\right) = \frac{122}{28} - \frac{15000 \cdot 122}{133000} = 4,36 - 1,38 = 2,98$$

$$\operatorname{tg}(4,36) = 2,98$$

$$4,36 \cong 250^\circ \Rightarrow \operatorname{tg}(250^\circ) = \operatorname{tg}(70^\circ) = 2,76$$

$$\therefore 2,76 \cong 2,98$$

$$\boxed{\therefore P_{cr} = 15000 \text{ Kg.}}$$

El valor de la tensión crítica  $\sigma_{cr}$  será:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{15000}{2 \cdot 4,53} = 1655 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_{cr} = 1655 \text{ Kg/cm}^2$$

Como  $\sigma_{cr} > \sigma_{ad} \Rightarrow$  tomamos como  $\sigma_{cr} = \sigma_{ad}$ , luego el valor máximo de  $P$  será:

$$P_{ad} = 1400 \cdot 9,06 = 12650 \text{ Kg.}$$

$$P_{ad} = 12.650 \text{ Kg}$$

Valor admisible para la estructura.

**NOTA:**

Este apunte ha sido realizado basándose en la teoría dada por el Ing. Ricardo Actis, Profesor de la Materia Estructuras III hasta el año 1987.