

# ANÁLISIS DE VIGAS DE SECCIÓN ARBITRARIA SOMETIDAS A TENSIONES DE CORTE CAUSADAS POR ESFUERZOS DE TORSIÓN Y CORTE: PARTE 2-FORMULACIÓN MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

A. T. Brewer<sup>a</sup>, C. N. Gómez<sup>a,b</sup>, y S. Preidikman<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>Departamento de Estructuras– Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales – Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, CP 5000, Córdoba, Argentina.

<sup>b</sup>CONICET – Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Av. Rivadavia 1917, Buenos Aires, Argentina.

Email: [alejtulbrewer@gmail.com](mailto:alejtulbrewer@gmail.com)

## RESUMEN

*Esta es la segunda parte de un trabajo realizado por los mismos autores. En la Parte 1 se presentó la teoría. En la Parte 2 se implementa la teoría presentada: en primer lugar, se trata la formulación de la teoría de Saint Venant aplicada a esfuerzos de torsión utilizando el Método de Elementos Finitos; en segundo lugar, se implementa la teoría presentada para determinar las tensiones de corte producidas por cargas transversales al eje de la estructura. Los resultados permiten cuantificar los valores de las tensiones de corte, del momento de inercia polar para secciones de forma arbitraria, la posición del centro de corte, y los coeficientes para ponderar las áreas de corte.*

**Palabras clave:** Vigas. Torsión. Tensiones de Corte por Corte. Elementos Finitos.

## INTRODUCCIÓN

El diseño de vigas utilizando elementos unidimensionales formulados en el marco del Método de Elementos Finitos (MEF) requiere la caracterización de la rigidez de la sección, que depende del material, de las propiedades geométricas de la misma y del tipo de esfuerzo a que se encuentra sometida la estructura. Entre las propiedades geométricas de la sección se encuentran el área, los momentos de inercia, el momento de inercia polar y el área de corte y se corresponden con los esfuerzos normales, de flexión, torsión y corte respectivamente. Además, de la mano de estos objetivos se encuentra la determinación de estado tensional de la pieza.

En estructuras aeronáuticas son de particular interés las secciones de pared delgada y las configuraciones de una o varias celdas. El enfoque utilizado en los primeros trabajos, con el objeto de resolver las cuestiones de secciones sometidas a torsión y corte, se relaciona con los conocidos como métodos de las fuerzas, [1, 2, 3, 4, 5]. La teoría se particulariza según la sección sea sólida, delgada abierta, de una celda, o de varias celdas. A su vez, se consideran separadamente los comportamientos bajo cargas de torsión y de corte. En este trabajo, en primer lugar, se implementa la formulación de la teoría de Saint Venant aplicada a esfuerzos de torsión utilizando el MEF. En segundo lugar, se implementa la teoría presentada para determinar las tensiones de corte producidas por cargas transversales al eje de la estructura. Ambas formulaciones fueron presentadas en la Parte 1 de este trabajo. Los resultados obtenidos pueden ser aplicados a secciones transversales de cualquier forma y permiten caracterizar los valores de las tensiones de corte, del momento de inercia polar para secciones de forma arbitraria y la posición del centro de corte. Conocidas las tensiones de corte, se pueden calcular los coeficientes para ponderar las áreas de corte, coeficientes que resultan necesarios si se quiere modelar vigas siguiendo la teoría de Timoshenko [7].

Este trabajo, es un paso preliminar a la cuantificación de las características seccionales que determinan las rigideces en vigas de una o más celdas construidas con materiales compuestos, lo que permitirá modelar estructuras de palas de aerogeneradores y alas de aviones. En estas estructuras, la configuración de apilado y la disposición de las fibras en las diferentes capas de material definen las deformaciones de flexión y torsión.

## FORMULACION EN ELEMENTOS FINITOS

### Torsión

Se adopta un elemento cuadrilátero isoparamétrico de 9 nodos, de tal modo que la función  $\omega(\xi, \eta)$  en el dominio del elemento de referencia se escribe

$$\omega^e(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^9 N_j(\xi, \eta) \omega_j = \mathbf{N} \boldsymbol{\omega}^e \quad (1)$$

En la (1),  $\boldsymbol{\omega}^e$  contiene los valores de la función  $\omega$  en los nudos del elemento y  $\mathbf{N}$  contiene las funciones de forma del elemento:

$$\mathbf{N} = [N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9] \quad (2)$$

$$\begin{aligned} N_1 &= [\xi\eta(1-\xi)(1-\eta)]/4; & N_2 &= [-\xi\eta(1+\xi)(1-\eta)]/4; & N_3 &= [\xi\eta(1+\xi)(1+\eta)]/4 \\ N_4 &= [-\xi\eta(1-\xi)(1+\eta)]/4; & N_5 &= [-2\eta(1-\xi^2)(1-\eta)]/4; & N_6 &= [2\xi(1+\xi)(1-\eta^2)]/4 \\ N_7 &= [2\eta(1-\xi^2)(1+\eta)]/4; & N_8 &= [-2\xi(1-\xi)(1-\eta^2)]/4; & N_9 &= [4(1-\xi^2)(1-\eta^2)]/4 \end{aligned} \quad (3)$$

Dado que el elemento es isoparamétrico entonces las coordenadas físicas  $y, z$  se relacionan con las coordenadas del elemento de referencia en la misma forma de la (1), es decir

$$y^e(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^9 N_j(\xi, \eta) y_j = \mathbf{N} \mathbf{y}; \quad z^e(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^9 N_j(\xi, \eta) z_j = \mathbf{N} \mathbf{z} \quad (4)$$

La matriz Jacobiana de la transformación (4) se define como:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \mathbf{y} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \mathbf{z} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \mathbf{y} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \end{bmatrix} [\mathbf{y} \quad \mathbf{z}] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Si en el dominio físico del elemento se describe la función  $\omega(y, z)$  en forma similar a la (1)

$$\omega^e(y, z) = \sum_{j=1}^9 N_j(y, z) \omega_j = \mathbf{N}_{yz} \boldsymbol{\omega}^e \quad (6)$$

En la (6) se han identificado a las funciones de interpolación  $\mathbf{N}_{yz}$  con los subíndices  $yz$ , para que no se confundan con las  $\mathbf{N}$  en las (1). Entonces, las derivadas de  $N_j(y, z)$  se pueden calcular haciendo

$$\frac{\partial N_j(y, z)}{\partial y} = \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}; \quad \frac{\partial N_j(y, z)}{\partial z} = \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad (7)$$

Y en función de la matriz Jacobiana la anterior se expresa

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_j(y, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_j(y, z)}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Por último se recuerda como se modifican las integrales ante un cambio de variables como el (4):

$$\int_{\Omega} f(y, z) dy dz = \int_{\Omega} f(\xi, \eta) \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad (9)$$

Si se adopta como función de peso  $W = N_j(y, z)$  entonces, a nivel elemental, la primera integral de la ecuación (32) de la primera parte, se expresa

$$\int_{\Omega^e} \nabla W \cdot \nabla \omega dydz = \left[ \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \mathbf{N}_{yz}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{N}_{yz}^T}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{N}_{yz}}{\partial z} \right) dydz \right] \boldsymbol{\omega}^e = \mathbf{k}^e \boldsymbol{\omega}^e \quad (10)$$

La matriz  $\mathbf{k}^e$  se puede escribir como

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \mathbf{N}_{yz}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{N}_{yz}^T}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{N}_{yz}}{\partial z} \right) dydz = \int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial \mathbf{N}_{yz}^T}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{N}_{yz}^T}{\partial z} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_{yz}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{N}_{yz}}{\partial z} \end{bmatrix} dydz \quad (11)$$

A partir de las (8) y (9), la (11) se puede expresar sobre el elemento maestro:

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial \mathbf{N}_{yz}^T}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{N}_{yz}^T}{\partial z} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_{yz}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{N}_{yz}}{\partial z} \end{bmatrix} dydz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \xi}, \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \eta} \right] \mathbf{J}^{-T} \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \det \mathbf{J} d\xi d\eta; \quad \text{ó} \quad (12)$$

$$\mathbf{k}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{B} \det \mathbf{J} d\xi d\eta; \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (13)$$

La segunda integral en la ec. (6)

$$\int_{\Omega} \nabla W \cdot \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial \mathbf{N}_{yz}^T}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{N}_{yz}^T}{\partial z} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{yz} \mathbf{z} \\ -\mathbf{N}_{yz} \mathbf{y} \end{bmatrix} dydz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \begin{bmatrix} \mathbf{N} \mathbf{z} \\ -\mathbf{N} \mathbf{y} \end{bmatrix} \det \mathbf{J} d\xi d\eta = \mathbf{p}^e \quad (14)$$

Finalmente la forma discreta de la ec. (32) de la primera parte, se obtiene del ensamble de las  $N$  matrices y vectores elementales (10) y (14):

$$\mathbf{A} \quad | \quad \rightarrow \quad \mathbf{K} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{P} \quad (15)$$

### Momento Polar de Inercia

El momento polar de inercia se obtiene de la expresión (11) (primera parte)

$$J = \int_A \left[ (\omega_z + y) y - (\omega_y - z) z \right] dA \quad (16)$$

Que se puede desarrollar como

$$J = \int_A \left[ z^2 + y^2 - (z\omega_y - y\omega_z) \right] dA = I_y + I_z - \int_A [z, -y] \begin{bmatrix} \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} dA \quad (17)$$

O teniendo en cuenta la (4), (6) y (8)

$$\begin{aligned} J &= I_y + I_z - \sum_1^N \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{N} \mathbf{z}, -\mathbf{N} \mathbf{y}] \mathbf{B} \boldsymbol{\omega}^e \det \mathbf{J} d\xi d\eta = \\ &= I_y + I_z - \sum_1^N \left[ (\mathbf{p}^e)^T \boldsymbol{\omega}^e \right] = I_y + I_z - \mathbf{P}^T \boldsymbol{\omega} = I_y + I_z - \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (18)$$

En la (18),  $\mathbf{P}$  y  $\boldsymbol{\omega}$  son el vector independiente y la solución del sistema de ecuaciones (15).

### Determinación de las Tensiones de Corte producidas por Torsión

A partir de las ec. (12) de la primera parte, se puede escribir

$$\begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \frac{M_x}{J} \left( \begin{bmatrix} \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} \right) \quad (19)$$

Es decir que la tensión en cualquier punto interior del elemento se calcula haciendo

$$\begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}^e = \frac{M_x}{J} (\mathbf{B} \boldsymbol{\omega}^e - \mathbf{h}^e) \quad (20)$$

Con  $\mathbf{h}^e = [z; -y]^T$ . Para la evaluación de la (20), deben tenerse presentes las ec. (4, 5, 6, 7, 8, y 13).

**Corte: carga  $V_z$**

La primera integral en la forma débil (38) de la primera parte, tiene la misma forma que la primera integral de (32) de la primera parte, y en consecuencia, si se adopta el mismo elemento para describir el problema en forma elemental resulta:

$$\int_{\Omega^e} \nabla W \cdot \nabla \Phi \, dydz = \left[ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{B} \det \mathbf{J} \, d\xi d\eta \right] \Phi^e = \mathbf{k}^e \Phi^e \quad (21)$$

En la segunda integral de la forma débil (38) (primera parte), las componentes de vector  $\mathbf{h} = [h_y, h_z]$ , se pueden escribir (ver ec. (4)) como:

$$h_y = \frac{V}{2}(I_z q - I_{yz} r) = \frac{V}{2} h_1; \quad h_z = \frac{V}{2}(-I_{yz} q - I_z r) = \frac{V}{2} h_2 \quad y \quad (22)$$

$$r = y^2 - z^2 = (\mathbf{N}_y)^2 - (\mathbf{N}_z)^2 \quad ; \quad q = 2yz = 2(\mathbf{N}_y)(\mathbf{N}_z) \quad (23)$$

Y entonces, la segunda integral resulta

$$\int_{\Omega} \nabla W \cdot \mathbf{h} \, d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{V}{2} \mathbf{B}^T \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \det \mathbf{J} \, d\xi d\eta \quad (24)$$

Por último, la tercera integral se calcula haciendo

$$\int_{\Omega} W \, 2(1+\nu)(I_{yz}y - I_z z) \, d\Omega = 2(1+\nu) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T (I_{yz}\mathbf{N}_y - I_z\mathbf{N}_z) \det \mathbf{J} \, d\xi d\eta \quad (25)$$

A nivel elemental, la (38) (primera parte), se escribe

$$\mathbf{k}^e \Phi^e = \mathbf{p}_z^e \quad (26)$$

Con  $\mathbf{k}^e$  dada por la (10) y

$$\mathbf{p}_z^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{V}{2} \mathbf{B}^T \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + 2(1+\nu) \mathbf{N}^T (I_z\mathbf{N}_z - I_{yz}\mathbf{N}_y) \right\} \det \mathbf{J} \, d\xi d\eta \quad (27)$$

El ensamble de las ecuaciones elementales conduce al sistema de ecuaciones finales

$$\mathbf{A} \quad ) \rightarrow \mathbf{K} \Phi = \mathbf{P}_z \quad (28)$$

**Corte: carga  $V_y$**

En forma similar, para la carga en la dirección  $y$ , al aproximar por elementos finitos la forma débil (40) (primera parte), resulta un sistema de ecuaciones algebraicas de la forma

$$\mathbf{K} \Psi = \mathbf{P}_y \quad (29)$$

Que resulta del ensamble de las matrices elementales  $\mathbf{k}^e$  (ver ec. (10)) y los vectores de carga de cada elemento  $\mathbf{p}_y^e$  que se calculan:

$$\mathbf{p}_y^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{V}{2} \mathbf{B}^T \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} + 2(1+\nu) \mathbf{N}^T (I_y\mathbf{N}_y - I_{yz}\mathbf{N}_z) \right\} \det \mathbf{J} \, d\xi d\eta \quad (30)$$

y en la cual las componentes del vector  $\mathbf{d} = [d_y, d_z]$  se escriben:

$$d_y = \frac{V}{2}(I_y r - I_{yz} q) = \frac{V}{2} d_1; \quad d_z = \frac{V}{2}(I_y q + I_{yz} r) = \frac{V}{2} d_2 \quad (31)$$

**Cálculo de las Tensiones de corte producidas por Fuerzas de Corte**

Las tensiones de corte se calculan a partir de las ecuaciones (20) y (24) de la primera parte, que pueden escribirse como:

$$\boldsymbol{\tau}^e = \begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}^e = \frac{V_y}{\Delta} (\nabla \Psi^e - \mathbf{d}^e) + \frac{V_z}{\Delta} (\nabla \Phi^e - \mathbf{h}^e) \quad (32)$$

en la que  $\Delta$  y las componentes de los vectores  $\mathbf{d}^e$  y  $\mathbf{h}^e$  están explicitados en las ec. (21 y 25) de la primera parte:

$$\nabla\Psi^e = \begin{bmatrix} \Psi_{,y} \\ \Psi_{,z} \end{bmatrix}^e = \mathbf{B}\Psi^e ; \nabla\Phi^e = \begin{bmatrix} \Phi_{,y} \\ \Phi_{,z} \end{bmatrix}^e = \mathbf{B}\Phi^e ; \mathbf{d}^e = \begin{bmatrix} d_y \\ d_z \end{bmatrix} ; \mathbf{h}^e = \begin{bmatrix} h_y \\ h_z \end{bmatrix} \quad (33)$$

### Determinación del Centro de Corte.

Existen varias definiciones del centro de corte. Algunas son puramente geométricas y no dependen del módulo de Poisson y otras, como en el presente caso, basadas en la teoría de la elasticidad, si dependen de dicho módulo. Para el cálculo de la coordenada  $y_{cc}$  del centro de corte se iguala el momento que produce la fuerza de corte  $V_z$ , actuando en el centro de corte, respecto del centroide de áreas (se asume que el Centro de Corte se sitúa en el cuadrante positivo de un sistema de referencia que pasa por el centroide), con el momento que producen las fuerzas de corte (producidas por  $V_z$ ) respecto del mismo punto:

$$V_z y_{cc} = \int (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA \quad (34)$$

Al reemplazar las expresiones de la tensión dadas por las ec. (32) ( $V_y = 0$ ), en (34), se concluye que la coordenada  $y_{cc}$  no depende del valor de la fuerza  $V_z$ . Lo mismo ocurre con  $z_{cc}$  respecto de  $V_y$ :

$$-V_y z_{cc} = \int (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA \quad (35)$$

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A continuación se presentan algunos ejemplos numéricos a fin de comparar con resultados obtenidos utilizando otras aproximaciones.

### Torsión: Ejemplo 1

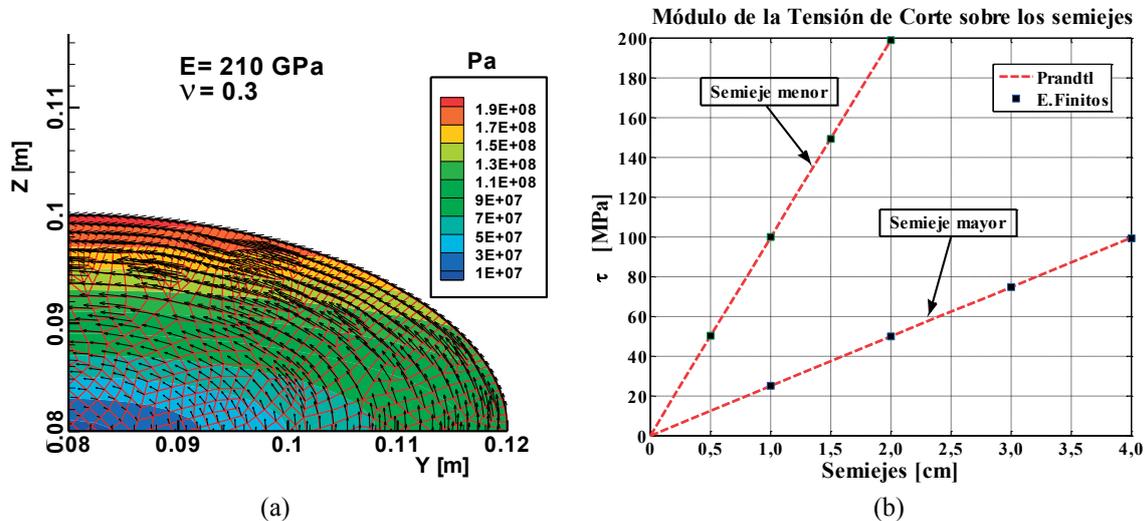


Figura 1. Sección sólida elíptica sometida a torsión.

En la Figura 1 se muestra la distribución de los vectores de tensión de corte sobre una sección elíptica sólida (se muestra sólo un cuarto de la sección), obtenidos mediante la formulación en Elementos Finitos (EF). El semieje mayor de la elipse mide  $a = 4\text{cm}$  y el menor  $b = 2\text{cm}$ . La malla que se muestra en la figura son cuadriláteros de cuatro nodos generados a partir de la malla con elementos cuadriláteros de nueve nodos (cada elemento de 9 nodos da origen a 4 elementos de cuatro nodos). La malla utilizada estaba conformada por 648 elementos de 9 nodos. El momento aplicado fue  $M_x = 5\text{ kNm}$ . Las características del material se muestran en la Figura 1(a). Para esta sección existen soluciones analíticas (ver [4, 6]) que permiten calcular el momento de inercia polar y las componentes de las tensiones de corte:

$$\tau_{xy} = -\frac{2M_x z}{\pi a b^3} ; \quad \tau_{xz} = \frac{2M_x y}{\pi a^3 b} ; \quad J = \frac{\pi a^3 b^3}{(a^2 + b^2)} \quad (36)$$

En relación a las tensiones, en la Figura 1(b) se han graficado las tensiones obtenidas por EF con las que resultan de las ec. (36). Los valores de la tensión se han calculado sobre los semiejes de la sección, mostrando muy buena correspondencia. Respecto al momento de inercia polar de la sección, el reemplazo de  $a$  y  $b$  en la (36) conducen a  $J = 8,0425 \times 10^{-7} \text{ m}^4$  mientras que el valor calculado por EF, ec. (18), es  $J_{EF} = 8,0463 \times 10^{-7} \text{ m}^4$ .

### Torsión: Ejemplo 2

En la Figura 2(a) se muestran las tensiones de corte que experimenta el perfil dimensionado en la Figura 2(b) cuando se le aplica un momento torsor  $M_x = 1 \text{ Nm}$ .

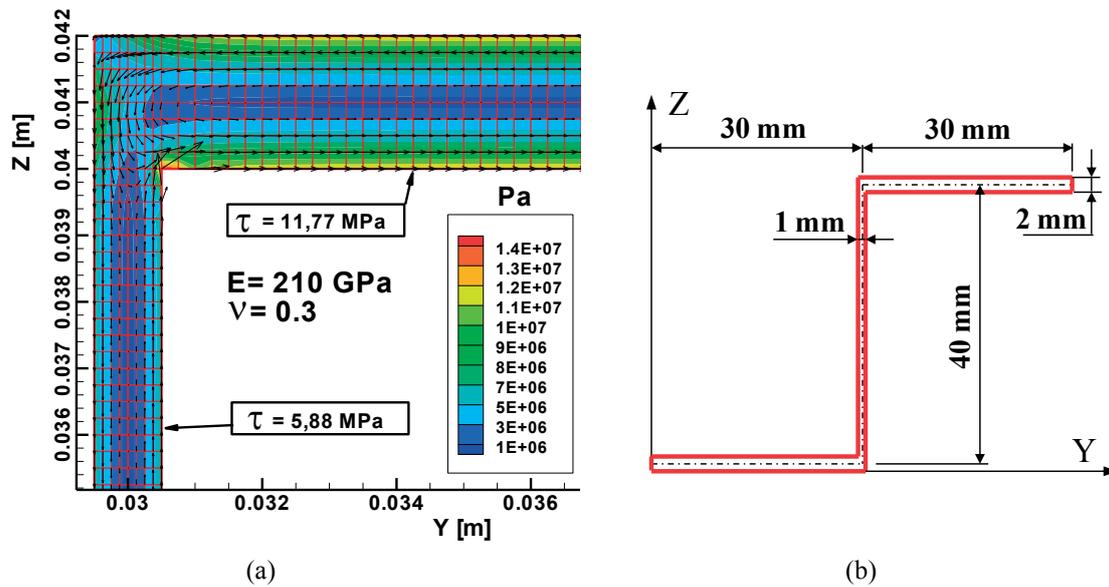


Figura 2. Perfil delgado abierto sometido a torsión.

En particular, este ejemplo se encuentra resuelto en la referencia [1], utilizando una extensión de la teoría de Bredt (formulada para secciones delgadas cerradas) al caso de secciones delgadas abiertas. Sin embargo, resultados analíticos idénticos se pueden obtener utilizando la analogía de la membrana que particulariza las funciones de tensión de Prandtl a este tipo de perfiles [4]. Cada una de las secciones rectangulares que compone el perfil posee un momento de inercia polar  $J_i = a_i t_i^3 / 3$ , expresión en la que  $a_i$  es la longitud y  $t_i$  es el espesor del tramo considerado. El momento de inercia polar total de la sección,  $J_T$ , se obtiene sumando las contribuciones de las alas (subindicadas  $f$ ) y el alma (subindicada  $w$ ):

$$J_T = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 a_i t_i^3 = 2J_f + J_w = \frac{2}{3} a_f t_f^3 + \frac{1}{3} a_w t_w^3 \quad (37)$$

Dado que la sección es homogénea, la relación de rigideces torsionales entre cada uno de los tramos y la rigidez torsional total de la sección queda determinada por el cociente  $J_i / J_T$ . En consecuencia, del momento total aplicado  $M_x$ , cada tramo toma una fracción  $M_i$  que queda determinada haciendo  $M_i = M_x J_i / J_T$ . Las líneas de tensión son paralelas a las paredes de los tramos (salvo en los extremos) y el módulo la tensión de corte varía linealmente en el espesor de cada tramo, tomando los máximos valores sobre la superficie y el valor nulo sobre el eje del tramo que se analice. Las expresiones que muestran la variación de la tensión en el espesor y su valor máximo son:

$$\tau_i = \frac{2M_i}{J_i} r_i \quad \text{con} \quad 0 \leq r_i \leq \frac{t_i}{2} \quad \rightarrow \quad \tau_{\max,i} = \frac{M_i t_i}{J_i} = \frac{3M_i}{a_i t_i^2} \quad (38)$$

En donde  $r_i$  se mide desde, y en dirección perpendicular a, la línea media. Reemplazando las características geométricas del perfil y el momento aplicado en cada tramo en las ecuaciones (37) y (38), se obtiene:

$$J_T = 173,33 \text{ mm}^4 ; \tau_{\max,f} = 11,54 \text{ MPa} ; \tau_{\max,w} = 5,77 \text{ MPa}$$

Mientras que utilizando las expresiones (18) y (20) en el marco del método de elementos finitos resultan:

$$J_T = 169,39 \text{ mm}^4 ; \tau_{\max,f} = 11,77 \text{ MPa} ; \tau_{\max,w} = 5,88 \text{ MPa}$$

Los resultados se muestran en la Figura 1 (a) junto con el diagrama de barras que indica la variación de la tensión en el espesor y los vectores tensión que muestran un comportamiento según lo descrito por la variación lineal de la tensión, ec.(38). En conclusión los resultados muestran una muy buena correspondencia.

### Corte, carga $V_z$ : Ejemplo 1

En la Figura 3 se muestra un perfil C cuya geometría se describe en (c), cargado en la dirección del eje Z con  $V_z = 250 \text{ kN}$ . La distribución del flujo de corte en el perfil puede analizarse planteando equilibrio en la sección, [4], lo que conduce a las siguientes expresiones:

$$q(s_1) = -\frac{V_z b t}{2I_{yy}} s_1 \quad \text{y} \quad 0 \leq s_1 \leq a ; \quad q(s_2) = -\frac{V_z t}{2I_{yy}} (ab + bs_2 - s_2^2) \quad \text{y} \quad 0 \leq s_2 \leq b \quad (39)$$

En la ec (39),  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $b = 20 \text{ cm}$ ,  $t = 1 \text{ cm}$  y  $I_{yy} = (a/6 + b/4) t^3 + (b^3/12 + ab^2/2) t$  es el momento de inercia respecto al eje que pasa por el baricentro de la sección, indicado como CG en la Figura 3(c).  $s_1$  y  $s_2$  son coordenadas que se miden sobre la línea media (ver Figura 3(c)).

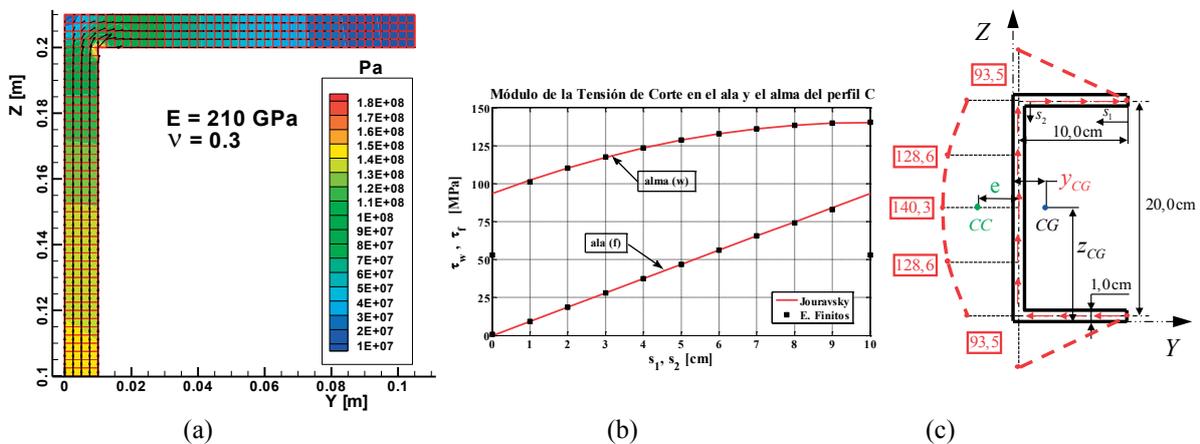


Figura 3. Perfil delgado abierto sometido a corte.

La determinación del centro de corte se logra igualando los momentos que producen las fuerzas de corte respecto al vértice inferior del perfil con el producido por  $V_z$  actuando en el centro de corte respecto al mismo punto:

$$V_z e = \frac{V_z b^2 t}{2I_{yy}} \int_0^a s_1 ds_1 \rightarrow e = \frac{a^2 b^2 t}{4I_{yy}} \quad (40)$$

En la figura 3(c) se esquematiza la posición del centro de corte que se encuentra a una distancia  $e$  del eje del alma. Mediante las expresiones (39) escritas en función de  $s_1$  y  $s_2$  se determina la tensión de corte sobre los ejes de las alas y el alma haciendo  $\tau(s) = q(s)/t$ . Se observa que sobre las alas la tensión de corte varía linealmente y en el alma en forma parabólica (ec. 39). Estas funciones, esquematizadas en la Figura 3(c) se han cuantificado en la Figura 3(b) conjuntamente con los valores que producen las ecuaciones (32). Se observa una muy buena correspondencia en los intervalos  $0 \leq s_1 \leq 9$  y  $1 \text{ cm} \leq s_2 \leq 19 \text{ cm}$ . La Figura 3(b) sólo muestra la mitad del intervalo de variación de  $s_2$ .

Se observa que en las proximidades del vértice ( $s_1 = 10$  y  $s_2 = 0$ ) el valor de la tensión calculada por EF decae, situación que se refleja en los colores que presentan las líneas de contorno en dicho punto, Figura 3(a). Respecto a la posición del centro de corte, la expresión (40) arroja un valor  $e=3,743$  cm. La ec. (35), provee la coordenada  $y_{cc} = -6.205$ cm que se miden desde el CG. El valor de la coordenada  $y_{CG} = 2,994$ cm medida desde el eje Z que coincide con el flanco izquierdo del perfil (ver Fig. 3(a)). Entonces  $e_{EF} = y_{cc} - y_{CG} + t/2 = (6,205 - 2,994 + 0,5)$ cm = 3,711cm, valor muy próximo al anterior 3,743 cm, que arroja la ec (40).

**Corte, carga  $V_z$ : Ejemplo 2**

En la Figura 2(b) se muestra la mitad de la geometría de una sección simétrica formada por tres celdas, tomada de la referencia [1], que se encuentra cargada en el centro de corte con  $V_z = -128,61$  kN. La longitud  $L$  y los espesores son:  $L = 500$ mm,  $t_f = 4$ mm y  $t_w = 2$ mm.

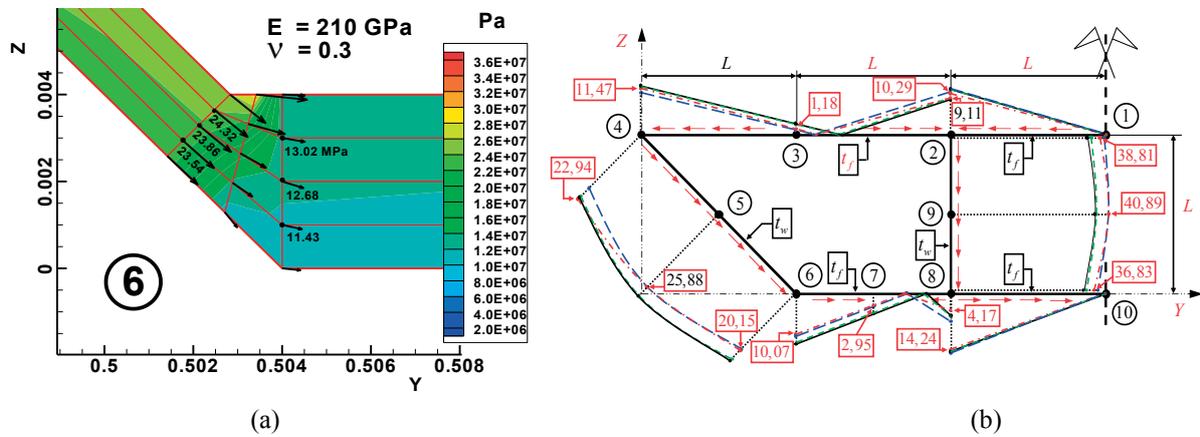


Figura 4. Sección Cerrada de tres celdas sometida a corte.

Tabla 1. Comparación de las tensiones obtenidas al modificar el coeficiente de Poisson

Punto							
1	0,0	0,0	0 (*)	0,0	0(*)	0,0	0(*)
2-Izq	9,11	8,81	-3	9,05	-1	10,67	17
2-Der	10,29	11,32	10	11,34	10	11,62	13
2-Inf	38,81	35,21	-9	36,10	-7	39,47	2
3	1,18	3,11	164	2,85	142	1,17	-1
4-Der	11,47	12,18	6	11,94	4	10,40	-9
4-Inf	22,94	22,33	-3	21,79	-5	19,01	-17
5	25,88	29,77	15	29,25	13	25,89	0
6-Izq	20,15	23,88	19	23,26	15	19,99	-1
6-Der	10,07	12,68	26	12,33	22	10,57	5
7	2,95	4,88	65	4,63	57	2,94	0
8-Izq	4,17	5,51	32	5,73	37	6,99	68
8-Der	14,24	14,64	3	14,67	3	14,88	4
8-Sup	36,83	34,31	-7	34,79	-6	37,78	3
9	40,89	37,01	-9	37,53	-8	40,89	0
10	0,0	0,0	0 (*)	0,0	0(*)	0,0	0(*)
		EMC	46		40		18

Se ha tomado como referencia de las tensiones, las obtenidas con la llamada Teoría Técnica (TT), ver referencia [1], que consiste en cortar cada una de las celdas y determinar el flujo de corte como si la

estructura no fuese cerrada. Las tensiones así encontradas equivalen a la fuerza de corte aplicada. El flujo de corte definitivo difiere para cada celda en una constante (en el caso general de una estructura sin simetría habría que determinar 3 valores de flujo constante, uno para cada celda). Para determinar los valores de estos flujos, se impone la condición de que la sección no gira (por estar cargada en el centro de corte), lo que conduce al planteo de 3 ecuaciones con tres incógnitas. Los flujos de corte finales son la suma de ambos. Conocidos los flujos de corte finales, la tensión de corte resulta de hacer  $\tau = q/t$ . En la Figura 4(b) se han indicado 10 puntos, rodeados por un círculo y situados en los vértices y a mitad de cada tramo. En esos puntos se han obtenido las tensiones de corte utilizando la Teoría Técnica descrita (cuyos valores resultan independientes del coeficiente de Poisson) y la ecuación (32) resuelta utilizando elementos finitos para tres valores del coeficiente de Poisson (0,3; 0,25; y 0,0). Estas tensiones corresponden a las columnas 2, 3, 5, y 7 en la Tabla 1. Estas tensiones son valores particulares de una distribución que se ha representado en la Figura 4(b): rojo (TT), negro (EF-0,3), verde (EF-0,25), y azul (EF-0,0). Las mayores diferencias se presentan entre la curva que representa la TT con la obtenida por EF y  $\nu = 0,3$ . Para cuantificar esta diferencia, en la Tabla 1 se han incluido las columnas 4, 6 y 8 que contienen la diferencia porcentual  $\Delta\% = 100(EF - TT) / TT$  (en los casos en que el cociente se hace indeterminado se toma solo la diferencia, lo que se indica (\*)). La menor diferencia entre los resultados obtenidos utilizando la TT y EF ocurre para  $\nu = 0,0$ . El número al pie de las columnas de error es el Error Medio Cuadrático. La Figura 4(a) muestra las tensiones y las líneas de contorno asociadas al módulo de la tensión en el punto identificado 6. Se puede observar que fuera de la intersección los elementos son sumamente largos. Queda pendiente el determinar la influencia de la dimensión de los elementos en los resultados. En este ejemplo la relación entre el largo del tramo más corto y el espesor mayor es 125, mientras que en el ejemplo anterior la relación era 10. Esto hace que (a fin de limitar el número de nodos de la malla) los elementos resulten alargados.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se obtiene la solución numérica de las funciones escalares  $\omega(y,z)$ ,  $\Phi(y,z)$ ,  $\Psi(y,z)$ , y sus correspondientes condiciones de borde. Estas funciones determinan las tensiones de corte cuando una sección homogénea se encuentra sometida a momento torsor según el eje  $x$  y a fuerzas de corte según los ejes  $z$  e  $y$  respectivamente. La aproximación a las funciones mencionadas se busca en el marco de los Métodos de Residuos Ponderados y en particular, el Método de Galerkin. Cuando la sección se solicita a torsión, es posible cuantificar el momento de inercia polar y la distribución de las tensiones de corte de secciones de cualquier forma. Cuando la sección se somete a corte, se puede determinar la posición del centro de corte y la distribución de tensiones para secciones de forma arbitraria. Se presentan cuatro ejemplos en los que se comparan los resultados obtenidos utilizando distintas técnicas presentes en la literatura con los obtenidos por elementos finitos. En general, hubo una muy buena correspondencia entre los valores previstos por otras teorías y los resultados que arroja el método de elementos finitos.

## REFERENCIAS

1. N. W. Murray: Introduction to the Theory of Thin-Walled Structures, 1986, Clarendon Press Oxford.
2. A.P. Boreisi and K. P. Chong: Elasticity in Engineering Mechanics, 1987, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands.
3. A. E. Love: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 1944, Dover, New York.
4. R. M. Rivello: Theory and Analysis of Flight Structures, 1969, McGraw-Hill, New York.
5. I. S. Sokolnikoff: Mathematical Theory of Elasticity, 1956, McGraw-Hill, New York.
6. W. D. Pilkey: Analysis and Design of Elastic Beams—Computational Methods, 2002, John Wiley & Sons, New York.
7. M. A. Bhatti: Advanced Topics in Finite Element Analysis of Structures, 2006, John Wiley & Sons, New York.